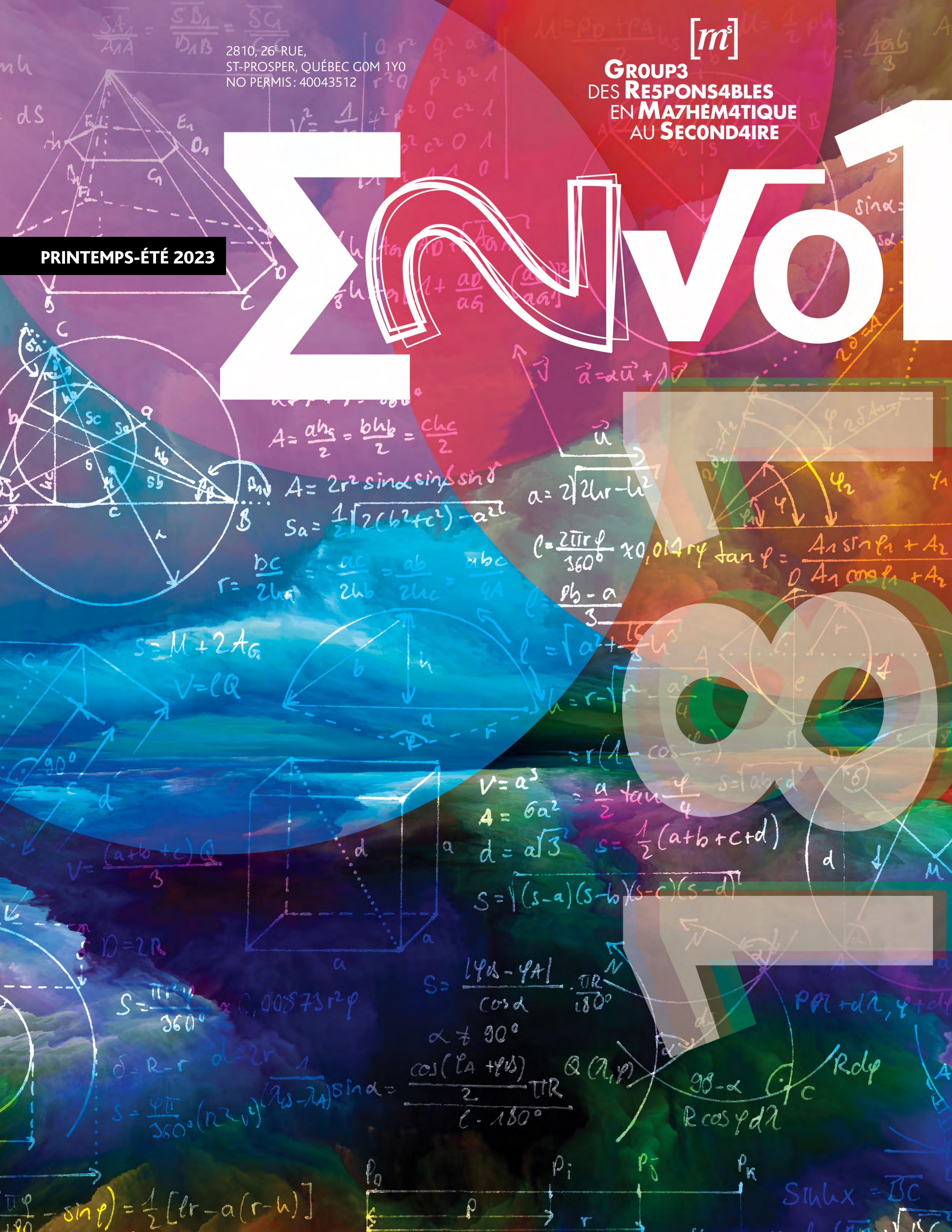


2810, 26E RUE,
ST-PROSPER, QUÉBEC G0M 1Y0
NO PERMIS : 40043512

[ms]

GROUP3 DES RE5PONS4BLES EN MA7HÉMA4TIQUE AU SEC0ND4IRE

Envol

PRINTEMPS-ÉTÉ 2023

SOUVENIRS CONGRÈS

Trois-Rivières 2022

GROUP3 DES RE5PONS4BLES EN MA7HÉM4TIQUE AU SECOND4IRE

GROUP3 DES RE5PONS4BLES EN MA7HÉM4TIQUE AU SECOND4IRE

CONSEIL D'ADMINISTRATION

FRÉDÉRIC OUELLET, président
fouellet@grms.qc.ca

GUY PICARD, vice-président
gpicard@grms.qc.ca

JEAN-PIERRE MARCOUX, trésorier
jpmarcoux@grms.qc.ca

MÉLANIE MORISSETTE, secrétaire
mmorissette@grms.qc.ca

FRANÇOIS POMERLEAU, administrateur
fpomerleau@grms.qc.ca

JEAN-FRANÇOIS POULIOT, administrateur
jfpouliot@grms.qc.ca

MÉLANIE BOUCHER, administratrice
mboucher@grms.qc.ca

COMMENT JOINDRE UN MEMBRE DU GRMS

En tout temps, si vous désirez les coordonnées au travail d'un des membres du conseil d'administration du GRMS, d'un des membres, d'un auteur, d'un animateur d'ateliers ou simplement avoir de l'information sur du matériel didactique ou toute information relative à votre association, vous pouvez appeler au secrétariat du GRMS.

S'il n'y a pas de réponse, vous pouvez laisser un message sur le répondeur.

Vous pouvez également utiliser le courrier électronique du secrétariat et, en tout temps, visiter notre site Web.

SECRÉTARIAT DU GRMS

MONIA LAROCHELLE, secrétaire
2810, 26e rue
St-Prosper (Québec) G0M 1Y0
Téléphone : 418-209-GRMS (4767)
secretariat@grms.qc.ca
www.grms.qc.ca

SECRÉTARIAT DES CONCOURS OPTI-MATH

Pour information
ROBERT MERCIER
T 450-471-7079
F 450-471-4960
opti-math@videotron.ca

MOT DE LA DIRECTRICE

On en a pour tous les goûts !

La revue Envol revient en force pour une 181e édition. Encore une fois, les auteurs ont été très généreux dans le partage de leurs connaissances. Vous y retrouverez des articles variés provenant de différents milieux et gageons que vous trouverez un ou plusieurs articles pertinents dans votre pratique.

Pour cette édition, le premier sujet abordé est l'apprentissage de la mathématique PAR la résolution de problèmes grâce à des enseignants et des conseillers pédagogiques qui ont fait partie du **PROJET MONTÉRÉGIE-ESTRIE.** Le Référentiel d'intervention en mathématique a été le moteur de leurs discussions pour mieux expérimenter différentes situations en classe. C'est un beau partage de connaissances à la suite des expérimentations. Le deuxième texte est écrit par **VINCENT L. ROULEAU** et fait la distinction entre $f(x)$ et y. Est-ce vraiment la même chose ? Il apporte plusieurs nuances selon les contextes et précise le vocabulaire à utiliser pour l'un et l'autre.

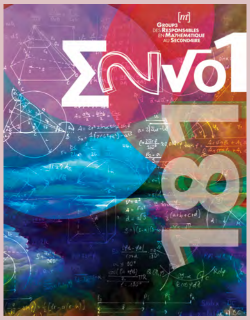
Un sujet de science est abordé par **PATRICK VIAU** sur l'équation $U = RI$, mais il rejoint nos intérêts en nous partageant ses réflexions sur les variables indépendante et dépendante. **SYLVAIN VERMETTE** ainsi que **MATHIEU SÉGUIN** nous proposent un texte sur la complétion du carré et ses riches possibilités d'interventions didactiques en lien avec la fonction quadratique. De quoi alimenter les discussions avec les élèves et donner du sens à certains concepts plus abstraits.

Finalement, suite à rédaction de sa thèse, **MATHIEU THIBAULT** nous partagera, en cinq parties, son récit de formation à l'enseignement des probabilités avec des outils technologiques. Pour ce premier récit, il évoque le fameux problème de Monty Hall avec les participants. De quoi faire réfléchir !

Merci à tous pour votre générosité.

Encore une fois, je fais appel à VOUS, enseignant, conseiller pédagogique, didacticien, étudiant et autre pour partager VOS belles idées dans VOTRE revue !

Audrey B. Raymond
Directrice de la revue Envol
araymond@grms.qc.ca



Revue du groupe des responsables en mathématique au secondaire

Directrice de la revue :
Audrey B. Raymond araymond@grms.qc.ca

Publicité :
Monia Larochelle T 418 209-GRMS (4767)
secretariat@grms.qc.ca

Graphisme et mise en page :
Pierre Lavallée, Néograf Design inc.

Impression : Impressions Lithosol inc.

Avertissement au lecteur
La direction de la revue publiera volontiers les articles et les lettres qui présentent un réel intérêt pour l'ensemble des membres du GRMS. Ces écrits engagent la seule responsabilité des auteurs et ne reflètent en rien la position officielle de l'organisme.

Date de tombée de la revue Envol
Il est **très important** de respecter les dates de tombée suivantes si vous souhaitez que vos articles soient publiés dans le numéro en préparation. Après ces dates, ceux-ci pourraient être mis en banque pour une parution ultérieure.

Parution	Dates de tombée :
No 182, automne-hiver 2023	30 juin 2023
No 183, printemps-été 2024	28 février 2024

Matériel fourni
Textes : en Word ou en Pages (version mac de Word)
Images : Toutes images doivent avoir une version séparée du Word en plus d'être dans le fichier Word pour savoir où elle doit se retrouver dans le texte. En format vectoriel (.ai ou .eps) sinon en dernier recours en tiff, jpg haute qualité ou png.
Toutes les images « rasterizées » (.tiff, .jpg, png, gif) doivent avoir **d'origine** une résolution suffisante pour qu'au format final nous ayons 300 dpi (dot per inch) au format final.

IMPORTANT : Il est strictement interdit d'utiliser des images venant du WEB, à moins d'avoir les droits de reproduction.
Aucune image venant du web ne sera acceptée à moins d'avoir les droits de reproduction écrits.
Sinon on cherche le trouble ! ! !

Pour plus de détails, consultez le site
www.grms.qc.ca/revueenvol

ISSN : 0833-8566

Dépôt légal : Bibliothèque national du Québec
Bibliothèque national du Canada

Envol paraît 2 fois l'an, Port de retour garanti.

Convention de la Poste-Publications : 40043512

Au maître de poste :
Retourner toute correspondance ne pouvant être livrée au Canada au :

GRMS
2810, 26e rue, St-Prosper Qc G0M 1Y0
secretariat@grms.qc.ca

Sommaire

Le GRMS, une communauté en OR!

C'est avec honneur que j'ai pris la relève de M. Guy Gervais à titre de président de cette magnifique communauté qu'est le GRMS! Pour relever ce défi, j'ai la chance d'accueillir dans notre équipe deux administrateurs possédant une énergie contagieuse, Mme Mélanie Boucher et M. Jean-François Pouliot.

C'est un événement majeur que de vivre un 50e anniversaire, c'est encore plus grandiose de le vivre au sein d'une association florissante et dynamique. Grâce à ses membres, le conseil d'administration peut accomplir de grandes choses et vous en serez témoin lors de notre congrès annuel les 25, 26 et 27 octobre 2023! Hé oui! Trois jours! En fait, la journée du 25 octobre sera une journée thématique facultative. Vous aurez le choix d'y assister ou non, mais avec les thèmes que nous vous proposerons, dépêchez-vous de réserver votre place!

Vous verrez aussi que le GRMS poursuit dans sa lancée d'avoir des présentateurs et conférenciers de très grandes envergures! Après M. Peter Liljedahl, qui fut la présentation coup de cœur de plusieurs participants de l'an dernier, nous allons avoir la chance de recevoir en personne … et en virtuel … !!! Je me permets de garder la surprise, mais vous ne serez pas déçus! Les paris sont ouverts et vous pouvez tenter votre chance de prédire les deux noms en remplissant ce formulaire https://bit.ly/predictionsGRMS50 ! Un tirage sera fait parmi tous les participants ayant prédit correctement les deux noms.

Aussi, notre session de création a pu enfin se tenir en 2023! Les 20 et 21 mars 2023, le GRMS a invité quelques participants à créer des tâches qui seront ensuite rendues disponibles à ses membres. Cette session en est à sa 3e édition et nous sommes fiers de dire que très peu d'associations (pour ne pas dire aucune à part nous) donnent accès à cette possibilité de réseautage et de mise en commun de créativité!

Encouragez vos collègues à adhérer à leur association, à rejoindre les rangs de cette magnifique communauté en OR!

Au plaisir de se rencontrer lors d'un de nos événements et au nom du conseil d'administration du GRMS, je vous dis : «Ne manquez pas le prochain congrès! Ce sera l'événement de l'automne!»

Merci et bonne fin d'année scolaire 2022-2023 !

Frédéric Ouellet
Président du GRMS
Enseignant au Collège de Sainte-Anne-de-la-Pocatière

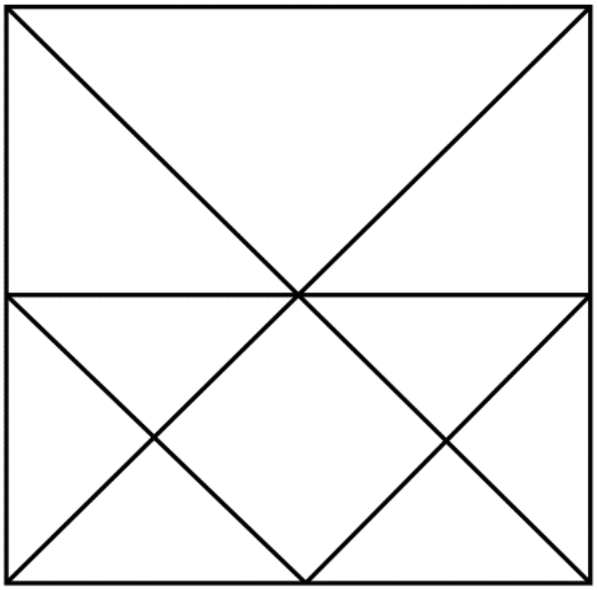
Un défi mathématique pour tous les élèves du secondaire

Les Concours **Opti-Math** et **Opti-Math+** sont organisés par un comité du GRMS et visent à encourager la pratique de la résolution de problèmes dans un esprit ludique et à démystifier, auprès des jeunes, les modes de pensée qui caractérisent la mathématique.

Voici des questions qui ont été sélectionnées parmi d'anciennes questions des Concours **Opti-Math** et **Opti-Math+** du GRMS.

Opti-Math 2015
Situation 8
Triangles ou quadrilatères

Un graphiste a dessiné le carré suivant partagé en dix régions.



a) Combien de triangles différents peut-on dénombrer dans cette figure?

b) Trace tous les quadrilatères formés de 5 régions ou plus.

Opti-Math 2008
Situation 13
Se peut-il que j'aie perdu mon temps ?

a) Si hier et demain ne sont pas lundi, qu'aujourd'hui n'est ni mercredi ni vendredi, quelle est la probabilité que le jour d'aujourd'hui soit jeudi?

b) Si nous ne sommes pas le lendemain de mardi ni le jour avant vendredi, que demain n'est pas lundi, que ce n'était pas lundi hier et que le jour d'après-demain n'est pas dimanche, quelle est la probabilité que le jour d'aujourd'hui ne soit pas lundi?

Opti-Math+ 2002

Situation 7

Le temps perdu

Audrey se rend à son travail, fière de son bolide dernier cri. La circulation est plus dense que d'habitude. Elle sera sûrement en retard.

Pour être à l'heure, il faut qu'elle roule à la vitesse moyenne de 72 km/h.

Prise dans un embouteillage, elle fait plutôt le quart du trajet à la vitesse moyenne de 30 km/h.

Toujours ralentie par la circulation, elle fait le quart du trajet qu'il lui reste à la vitesse moyenne de 50 km/h.

Finalement, la circulation devient fluide et elle fait le reste du trajet à la vitesse moyenne de 90 km/h.

Quelle distance avait-elle à parcourir si son retard a été de 30 minutes ?

Opti-Math+ 2014

Situation 8

Dans une galaxie loin, loin...

Voilà! C'est fait! Les humains ont pris contact avec une civilisation extra-terrestre intelligente. On nomme ces êtres les Huit-Doigts, parce qu'ils ont deux mains de quatre doigts chacune.

Après avoir analysé leurs connaissances en mathématique, on constate qu'ils ont développé les mêmes quatre opérations de base que nous.

Après la traduction de leurs algorithmes d'addition et de soustraction, on note des bizarreries.

- **Les chiffres 8 et 9 n'existent pas dans leur système de numération.**
- **La somme de 2 et 5 est 7, mais celle de 3 et 5 est 10.**
- **Voici deux autres de leurs calculs :**

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\ \ } \\ 1234 \\ +\ \ 467 \\ \hline 1723 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 0\,13\ } \\ \cancel{1}\cancel{3}5 \\ -\ \ 53 \\ \hline 62 \end{array}$$

a) Trouve la somme de 26 et 54 pour un Huit-Doigts.

b) Quelle est la différence entre 627 et 34 pour un Huit-Doigts ?

c) Quel est le produit de 206 par 341 pour un Huit-Doigts ?

L'apprentissage de la mathématique PAR la résolution de problèmes

Projet Montérégie-Estrie

Bénédicte Ferragne-Simard
conseillère pédagogique, CSS des Hauts-Cantons
Benedicte.Ferragne-Simard@csshc.gouv.qc.ca

Achraf Hajby
conseiller pédagogique, CSS Marie-Victorin
achraf_hajby@cssmv.gouv.qc.ca

Fouzia Jetto
enseignante de mathématique de 2e cycle, CSS Marie-Victorin

Anne-Marie Lagueux
enseignante de mathématique en 3e sec., CSS des Hauts-Cantons

Loula Abdourahim
enseignante de mathématique en 3e sec., CSS des Trois-Lacs

La « **résolution de problèmes** » fait référence à des tâches mathématiques qui ont le potentiel de fournir des défis intellectuels pour améliorer la compréhension et le développement mathématique des élèves (Liljedahl et al., 2016). Outre la compétence disciplinaire, elle joue un rôle important en mathématique et semble avoir un rôle de plus en plus essentiel dans l'enseignement des mathématiques du préscolaire au secondaire (Ibid.). Cependant, savoir comment intégrer la résolution de problèmes de manière significative n'est pas nécessairement évident pour les enseignants de mathématique.

Dans cet article, nous présentons un bilan de l'expérimentation vécue par trois des enseignantes de troisième secondaire qui ont tenté l'apprentissage PAR la résolution de problèmes (RdP). Une place importante est donc accordée à leur témoignage et aux bienfaits de cette approche pédagogique pour l'apprentissage des élèves, ainsi que le développement professionnel de ces enseignantes. En ce sens, certains concepts théoriques seront explicités et des ressources seront partagées afin de faciliter vos propres expérimentations.

Le Référentiel d'intervention en mathématique (RIM), publié en 2019 par le MEES, accorde trois intentions à la résolution de problèmes : l'apprentissage PAR la résolution de problèmes, l'apprentissage POUR la résolution de problèmes et la résolution de problèmes pour apprendre à résoudre des problèmes. Dans le cadre de nos travaux, nous avons ciblé l'apprentissage PAR la RdP, soit « une modalité pédagogique qui permet d'apprendre les concepts et processus mathématiques » (MEES, 2019, p. 29). Les élèves ne possèdent donc pas, au préalable, tous les « outils mathématiques » pour réussir la tâche proposée (Ibid.).

Comme l'apprentissage PAR la RdP implique une tâche pour laquelle l'élève ne maîtrise pas encore l'ensemble des concepts mathématiques, nous avons davantage situé cette approche au début d'une séquence d'enseignement-apprentissage lors de nos expérimentations, soit avant l'enseignement même des nouvelles notions (**Figure 1**). Ainsi, par l'entremise du problème, l'élève pourra découvrir les nouveaux savoirs mathématiques.

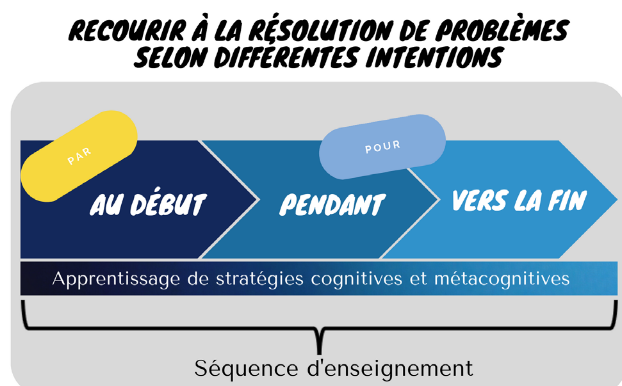


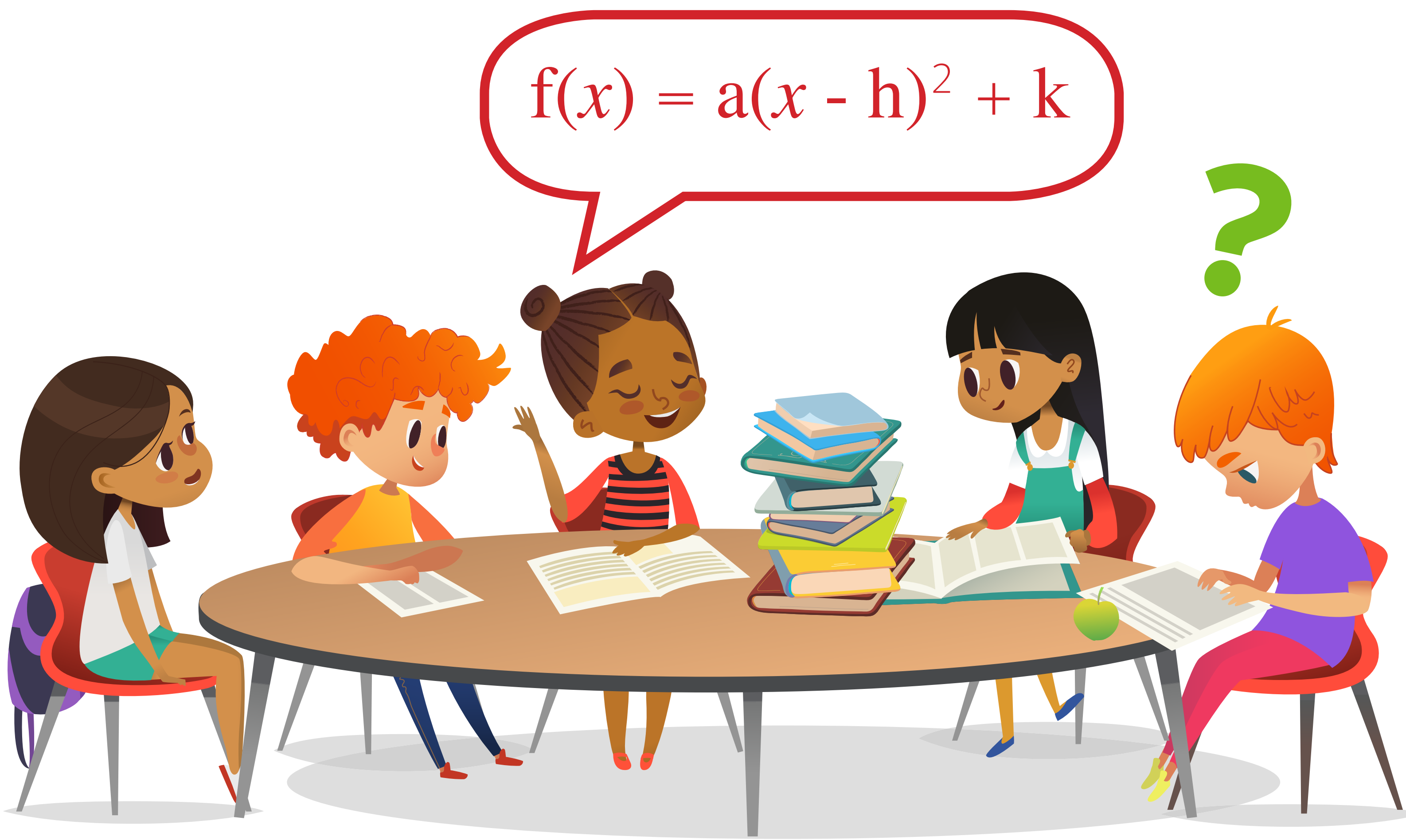
Figure 1
La place des intentions de la RdP dans la séquence d'enseignement-apprentissage.
Image élaborée par Marie-Josée Simard, conseillère pédagogique, CSSTL

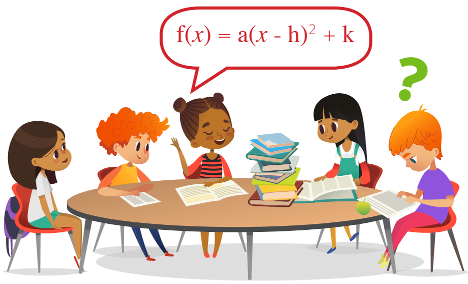
Le choix du problème à présenter aux élèves devient alors un critère primordial pour l'enseignant. C'est d'ailleurs son intention pédagogique qui guide ce choix (quel est l'objet d'apprentissage ?). Le problème est ensuite modifié ou créé de toute pièce au regard des caractéristiques d'un bon problème, comme décrit dans le RIM. Selon le MEES (2019), un bon problème devrait posséder les caractéristiques suivantes :

- **Être formulé clairement, sous forme d'un énoncé écrit, oral ou même illustré, de façon à être compris par tous les élèves ;**
- **Être énoncé de façon à ne pas induire une stratégie de résolution ou l'emploi d'un algorithme en particulier ;**
- **Éveiller la curiosité et maintenir l'intérêt des élèves ;**
- **Inciter à la réflexion et aux échanges mathématiques ;**
- **Être à la portée de tous les élèves, tout en leur offrant un défi ;**
- **Se prêter à l'utilisation d'une variété de stratégies de résolution ;**
- **Faire appel au vécu des élèves ;**
- **Donner lieu à une ou à plusieurs réponses correctes.** (p.18)

Trois temps de l'enseignement PAR la RdP dictent la planification et le pilotage de la tâche en classe (MEES, 2019). D'abord, il y a la mise en train où les élèves explorent et résolvent, seuls ou en équipe, le problème (Ibid.). L'enseignant, lui, agit à titre de guide : il circule entre les équipes pour observer, questionner et soutenir les élèves. Vient ensuite l'exploration en groupe qui correspond à une discussion dirigée par l'enseignant (Ibid.). À titre de médiateur, l'enseignant permet aux élèves de mettre en commun les différentes stratégies utilisées et de rendre explicites les liens entre ces différentes stratégies (différences, ressemblances, etc.) (Ibid.). Finalement, le troisième temps, soit l'objectivation (institutionnalisation des apprentissages), permet à l'enseignant de formaliser explicitement les apprentissages mathématiques réalisés (Ibid.)

Ainsi, en s'appuyant sur le RIM, une collaboration entre conseillers pédagogiques et enseignants de la première à la troisième secondaire de la région Montérégie-Estrie a permis d'échanger sur nos pratiques et de développer une banque de problèmes. Comme l'apprentissage PAR la RdP était une modalité pédagogique peu retrouvée dans nos milieux, les enseignants souhaitaient être mieux outillés en vue de l'expérimenter en classe. Nous en sommes actuellement à notre deuxième année de collaboration. L'an dernier, nous avons pris le temps de nous approprier les bases de l'apprentissage PAR la RdP, à savoir le choix du problème, l'analyse à priori et les trois temps d'un enseignement PAR la résolution de problèmes. Nous avons donc créé ou bonifié des problèmes à présenter aux élèves, planifié leur pilotage et expérimenté ces tâches en classe. Cette année, nous poursuivons ces mêmes objectifs tout en ajoutant la dimension du travail collaboratif, l'enseignement de ses stratégies et de ses modalités en classe.





L'apprentissage de la mathématique PAR la résolution de problèmes

Projet Montérégie-Estrie

Nous vous présentons le témoignage de trois enseignantes de mathématique qui ont expérimenté la RdP avec leurs élèves :

Témoignage de Fouzia Jetto, CSS Marie-Victorin

J'enseigne les mathématiques depuis 15 ans. Je me considère comme une enseignante bien ordinaire qui aime donner du sens à ce que j'enseigne. Passionnée de mathématique, j'essaie de mon mieux de contextualiser les notions et de créer des liens intra et extra-mathématiques pour ainsi partager cette passion, ou au moins rétablir le lien avec cette discipline mal aimée. Je prends alors beaucoup de temps pour penser à mon début de chapitre : trouver la bonne question, la bonne image, l'histoire de la notion, le lien avec l'environnement, les sciences, etc. Cette façon rejoint une bonne partie de mes élèves, les attentifs, les intéressés, mais pas tous.

Un jour arrive une pandémie où je devais innover, apprendre et réapprendre à enseigner autrement. Avec cet élan de courage, j'ai expérimenté l'enseignement PAR la RdP. Je commence ainsi le chapitre sur les systèmes d'équations avec un problème classique où je demande à mes élèves, placés en équipe dans les salles de dérivations de Teams, de comparer les frais chargés par deux compagnies pour proposer la plus avantageuse. Je leur demande d'utiliser des outils mathématiques pour me convaincre. Pendant le déroulement de l'activité, je guidais les élèves avec uniquement des questions. Je les ai poussés ainsi à représenter la situation avec les trois modes de représentations, notamment la table de valeurs, le graphique et certains même algébriquement. Pendant l'activité, les élèves étaient engagés, curieux et intéressés. Le choix du problème a permis une différenciation pédagogique. Les élèves ayant des difficultés en mathématique ont été capables d'analyser le problème avec une table de valeurs voir même avec un graphique et ceux qui sont plus à l'aise ont trouvé défi dans la résolution algébrique. Le retour sur l'activité m'a permis d'institutionnaliser le savoir à partir de leurs traces. Les élèves avaient l'impression, à raison, qu'ils ont contribué au cours. Leur posture a totalement changé. Ils ont passé de consommateur du savoir à créateurs et bâtisseurs.

Depuis ce moment-là, l'enseignement par la résolution de problème est devenu ma pratique. D'autant plus que j'enseigne aux élèves du programme Sport-études qui ont 30 % de temps en moins que mes groupes du régulier. En commençant le chapitre avec un problème, j'ai réalisé que je gagne du temps. Une résolution de problème est engageante. La résistance naturelle et silencieuse chez certains élèves, qui est due à un non-sens, est dissipée. Imaginez qu'avec des élèves de quatrième secondaire SN, nous passons plus qu'un mois à pratiquer les quatre opérations sur des polynômes, entre autres nous débarrasser des parenthèses. Le cours suivant, je leur apprends comment factoriser. Comment les remettre ces parenthèses !! Pauvres enfants !! En revanche, avant d'enseigner les techniques de factorisation, je leur ai donné un problème simple à faire, en équipe, de recherche de dimensions d'un potager rectangulaire connaissant son aire. Le choix des variables didactiques m'a permis encore une fois de différencier pour répondre aux besoins et niveaux de mes élèves.

Fouzia Jetto,
CSS Marie-Victorin
Enseignante de mathématique de deuxième cycle

Entrevue avec Anne-Marie Lagueux, CSS des Hauts-Cantons

C'est sous la forme de questions-réponses qu'elle nous partage son expérience de l'enseignement PAR la RdP.

Quel est ton contexte d'enseignement ?

« Je suis dans un milieu scolaire où nous avons la plus haute cote de défavorisation. J'enseigne à des groupes réguliers faibles et à un groupe de santé globale qui a une période de mathématique en moins par deux semaines. »

Qu'est-ce qui t'a amenée à vouloir enseigner PAR la RdP ?

« Je trouvais que souvent les mathématiques étaient sorties de leur contexte. Les élèves avaient de la difficulté à comprendre pourquoi on voyait cette matière-là. Tandis qu'avec l'apprentissage PAR la RdP, on vient mettre un contexte et on fait émerger chez l'élève le besoin de résoudre le problème et donc, de comprendre une nouvelle notion. Les élèves sont ainsi plus investis dans cette période-là puisqu'ils désirent être capables de trouver la solution. »

Quelles stratégies as-tu utilisées pour enseigner PAR la RdP, notamment pour l'objectivation des apprentissages qui représente, pour plusieurs enseignants, un défi ?

« Après quelques expérimentations, j'ai décidé de prendre en photo, avec mon iPad, les démarches des élèves. Ainsi, lors du retour, je peux afficher les différentes stratégies de résolution utilisées par les élèves pour en ressortir les forces et les limites. Cette comparaison me permet aussi de dédramatiser l'erreur auprès des élèves.

Je fais ensuite ressortir, lors de l'objectivation, ce qui nous intéresse par rapport à la matière. Ainsi, quand j'arrive pour donner la théorie, je ne fais plus de "remplissage de notes". Il s'agit davantage d'un retour sur les nouvelles notions apprises et les stratégies de résolution efficaces. »

Quels sont les comportements et l'attitude des élèves en classe ?

« Les élèves sont moins passifs, plus investis dans la tâche. »

« Au début, je pensais que les élèves faibles allaient rester bloqués et ne pas vouloir se mettre à la tâche. Je me suis toutefois rendu compte que c'était souvent eux qui étaient les plus engagés. Je ne sais pas exactement pourquoi, mais avoir à trouver une solution les motive. J'ai d'ailleurs, à certains moments, plus d'une version d'un même problème afin d'offrir un défi à la hauteur du niveau des élèves. Je m'assure aussi de guider les élèves à l'aide de questions de relance. »

Quels impacts as-tu observés à plus long terme ?

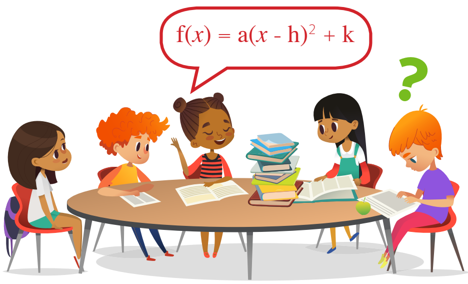
« En comparaison avec mes élèves de l'an dernier qui éprouvent des difficultés d'apprentissage similaires, je trouve que cette approche permet une modélisation des démarches attendues. Les élèves apprennent à structurer et à communiquer leur pensée à l'écrit. »

« De même, comme les élèves sont engagés dans la tâche, ils retiennent davantage l'information. J'ai l'impression qu'à long terme, c'est payant pour les acquis. »

Comment est-ce que ta participation au comité a contribué favorablement à ton développement professionnel ?

« Le comité a été, pour moi, un éveil. Depuis que j'ai embarqué dans ce projet, je me suis remise à planifier des activités de résolution de problèmes pour donner le goût aux élèves d'apprendre les mathématiques. Les cours où je n'enseigne pas PAR la RdP, les élèves me demandent : c'est quand la prochaine fois qu'on en fait ? Les élèves sont intéressés et cela amène de la motivation autant de leur côté que du mien. Je constate d'ailleurs que mes efforts sont récompensés et que mon temps est bien investi. »

Anne-Marie Lagueux,
CSS des Hauts-Cantons
Enseignante de mathématique
en troisième secondaire en milieu défavorisé



L'apprentissage de la mathématique PAR la résolution de problèmes

PROJET MONTÉRÉGIE-ESTRIE

Témoignage de Loula Abdourahim, CSS des Trois-Lacs

UN FORFAIT TÉLÉPHONIQUE TRÈS RENTABLE… À PLUSIEURS DEGRÉS !

L'objectif de l'activité d'apprentissage est la résolution d'un système d'équations et les limites mathématiques de l'utilisation d'une table de valeurs. Pour ce faire, j'ai présenté aux élèves une situation assez familière, un forfait internet (**FIGURE 2**).

Dans un premier temps, comme je voulais que les élèves s'approprient rapidement le contexte et la situation, ils devaient me dire le montant qu'un forfait internet de téléphonie cellulaire coûtait. Bien sûr, selon la quantité de données en Giga-octets proposée, ça pouvait convenir à un individu, à toute une famille, mais aussi à une plus grande entreprise comme un centre de services scolaire ou une quelconque société. L'objectif de cette première phase est de sensibiliser les élèves au fait qu'ils doivent s'attendre à utiliser de grandes quantités de Giga-octets pour mener à bien cette activité d'apprentissage qui concerne, je le rappelle, une entreprise qui offre deux forfaits internet à de grandes compagnies et non à un individu.

Par la suite, je leur ai demandé de se mettre par équipe de trois. Comme c'était la première fois, je leur ai laissé choisir leurs coéquipiers. Mon objectif était que les élèves mènent à bien cette activité, mais aussi de vérifier si le travail collaboratif se déroulait bien.

Les élèves devaient travailler sur des tableaux verticaux que j'avais collés sur les murs de la salle de classe. Par un signal lumineux que j'activais, ils devaient à tour de rôle, prendre le crayon feutre pour poursuivre le travail. Instinctivement, ils ont commencé à construire deux tables de valeurs pour chacun des forfaits.

Si j'ai décidé de faire vivre cette activité d'apprentissage à des élèves en grande difficulté, c'est parce je voulais voir s'ils allaient se mobiliser, s'entraider et enfin résoudre cette situation.

J'ai été impressionnée de constater que toutes les équipes se sont mises à l'œuvre. En effet, les élèves se sont parlé, ils se sont justifiés sur le choix des valeurs qu'ils devaient consigner dans leur table de valeurs et surtout, tous les élèves ont par-

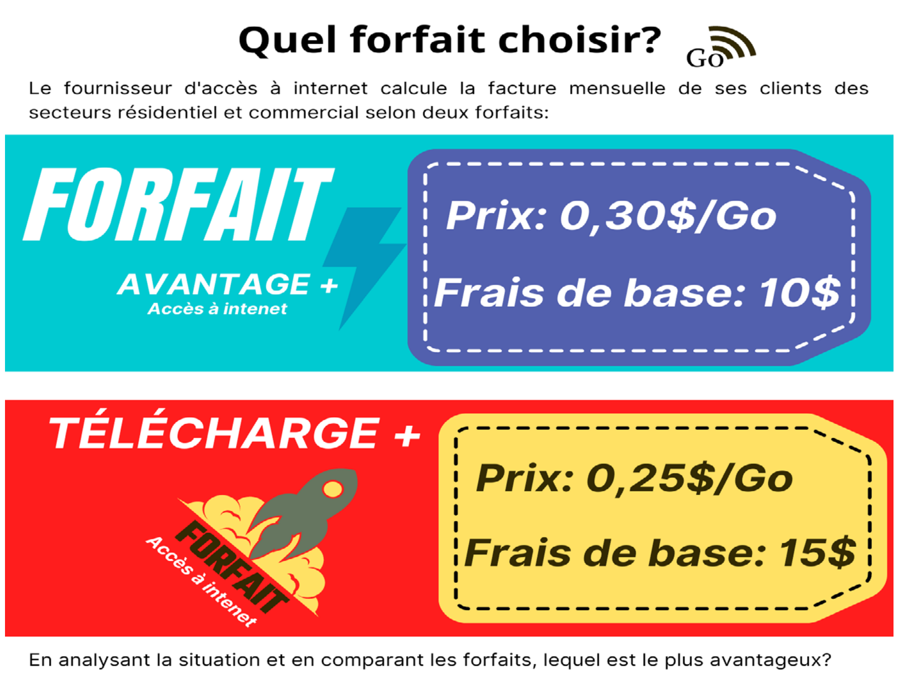


FIGURE 2

Situation problème Un forfait téléphonique très rentable.
Image élaborée par Marie-Josée Simard, conseillère pédagogique, CSS des Trois-Lacs

ticipé. Par contre, j'ai été surprise de voir que mon élève le plus performant a été celui qui a rencontré des difficultés à embarquer dans cette activité. Je le voyais figé, déstabilisé, presque incapable de consigner des valeurs lorsque c'était son tour. Je le voyais réfléchir au but de cette activité, il ne comprenait pas où en était l'objectif. Visiblement, et à mon humble avis, il aurait été plus heureux de savoir ce qu'il fallait faire pour se mettre tout de suite au travail et aller exécuter plusieurs pages d'exercices.

En résumé, comme enseignante, je suis sortie grandie de cette expérience et depuis, j'ai réalisé plusieurs activités d'apprentissage PAR la RdP. Mon défi était de faire vivre à une clientèle d'élèves en difficulté d'apprentissage, un cours de mathématique de façon peu conventionnelle en ayant toujours des attentes élevées. J'ose croire que j'ai atteint mon objectif : mes élèves ont utilisé leur capacité à travailler en équipe, à tenir compte de l'avis de leurs camarades, à essayer de trouver des solutions ensemble, à s'écouter et à communiquer en faisant preuve d'ingéniosité. Cela me laisse penser que nos élèves, qu'ils soient forts ou faibles académiquement, sont outillés pour se mobiliser dans un contexte d'apprentissage qui leur est totalement inconnu, ils sont capables de faire appel à leurs connaissances antérieures sans l'aide de leur enseignant, ils retiennent et réinvestissent adéquatement leurs savoirs.

Au passage, je tiens à remercier très humblement mon centre de services scolaire et ma conseillère pédagogique qui nous ont donné, à moi et à mes groupes, les ressources nécessaires pour vivre et enseigner les mathématiques différemment. Grâce à cela, l'activité d'apprentissage que j'ai présentée à mes élèves s'est déroulée de manière dynamique et avec l'implication pleine et entière de ces derniers.

Loula Abdourahim
CSS des Trois-Lacs
Enseignante de mathématique en troisième secondaire auprès de groupes en soutien académique

Conclusion

Le témoignage des enseignantes est unanime : essayer l'enseignement PAR la RdP, c'est l'adopter ! En effet, cette approche semble favoriser l'engagement, la participation et la compréhension des élèves. Il s'agit également d'une approche qui facilite la mise en place de la différenciation pédagogique, soit d'offrir un défi à la portée de chaque élève.

Nous espérons vous avoir donné le goût d'essayer l'enseignement PAR la RdP avec vos élèves. Pour faciliter vos débuts, nous vous partageons des ressources pour le premier cycle et la troisième secondaire. C'est maintenant à votre tour d'oser faire autrement et d'expérimenter !

Références

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). ***Problem solving in mathematics education***. Springer Nature.

Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (2019). ***Référentiel d'intervention en mathématique***. Document téléaccessible à l'adresse : http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/dpse/adaptation_serv_compl/Referentiel-mathematique.PDF

Vincent L. Rouleau
Pensionnat du Saint-Nom-de-Marie
vincent.laurence-rouleau@umontreal.ca

$f(x)$ et y, est-ce bien la même chose ?

Considérons le titre de cet article en guise d'introduction et attaquons-nous sans plus tarder à la question. Faisons apparaître les symboles y et $f(x)$ dans deux contextes bien distincts. D'une part, prenons $y = 2x - 3$ de telle sorte que les couples (x, y) qui sont solutions de l'équation déterminent les coordonnées de points dans le plan cartésien ; l'objet géométrique représenté par l'équation est une droite. D'autre part, définissons une fonction f telle que $f(x) = 2x - 3$; le *graphe* de f, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x, f(x))$ tels que x appartient au domaine de f, peut être illustré dans le plan cartésien. Il y a donc une superposition possible des représentations de deux différents objets mathématiques (**Figure 1**).

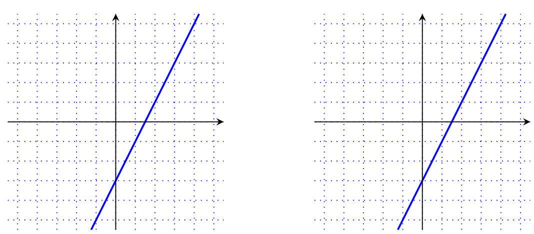


Figure 1
À gauche, la droite d'équation $y = 2x - 3$; à droite, l'illustration du graphe de la fonction f telle que $f(x) = 2x - 3$. C'est bien la même chose, n'est-ce pas ?

Cependant, y a-t-il vraiment adéquation entre les deux objets pour autant ? Symboliquement parlant, la seule distinction semble se situer entre l'emploi de y d'une part et de $f(x)$ d'autre part. Supposons donc qu'il y ait une équivalence entre les deux symboles et que l'on puisse les interchanger impunément, un peu comme si $y = f(x)$. Replongeons en géométrie et considérons l'inéquation $y \geq 2x - 3$; ses solutions déterminent les points d'un demi-plan, par exemple (1, 3) et (1, 4) (**Figure 2**).

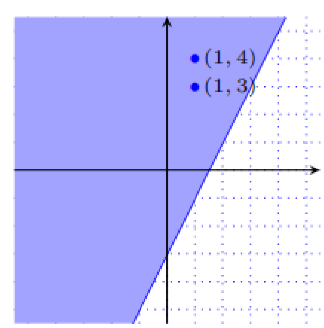


Figure 2
Le demi-plan associé à l'inéquation $y \geq 2x - 3$

Si l'on remplaçait y par $f(x)$, on aurait $f(x) \geq 2x - 3$. Les solutions (1, 3) et (1, 4) signifieraient à présent que si $x = 1$, alors $f(1) = 3$ et $f(1) = 4$. Or, dans le monde des fonctions, cela n'a évidemment pas de sens !

Devons-nous en conclure que $y \neq f(x)$? Pas tout à fait ; cependant, on voit bien que la question n'en est pas seulement une de choix de notation et entraîne vers un questionnement sémantique plus profond.

Notation ou dénotation ?

On a observé précédemment que le monde des objets géométriques et celui des fonctions entretiennent des liens entre eux. Ainsi la fonction f telle que $f(x) = 2x - 3$, réduite à l'illustration de son graphe dans le plan cartésien, coïncide avec une certaine droite. De même les fonctions g et h telles que $g(x) = x^2 - 5x + 6$ et $h(x) = \dfrac{12}{x}$, pouvant surgir de contextes en dehors de la géométrie, correspondent respectivement à une ***parabole*** et à une ***hyperbole***, des objets géométriques connus depuis une époque ancienne qui précède probablement celle où l'on a pu rencontrer g et h.

Au cours de la scolarisation, l'étude de fonctions dont les graphes se confondent bien avec des objets géométriques remarquables renforce peut-être l'amalgamation même de ces idées mathématiques distinctes ***a priori***. L'entremêlement est si prenant que l'on pourrait aller jusqu'à employer des mots comme synonymes ; par exemple, en voulant parler du ***couple*** (x, y) du ***graphe*** de f où x est l'***antécédent*** de y et y l'***image*** de x (par f), il serait tentant d'y voir plutôt le ***point*** (x, y) d'une ***courbe*** où x est l'***abscisse*** et y est l'***ordonnée***. Il faut dire qu'historiquement, l'intérêt pour certaines fonctions s'est souvent manifesté en symbiose avec leur pendant géométrique, et il en demeure des vestiges jusque dans le langage ; les ***graphes*** de certaines fonctions évoquent à juste titre leur allure géométrique.

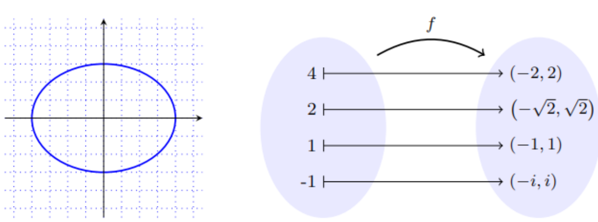


FIGURE 3

À gauche, l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ *;*
à droite, une illustration graphique de la fonction f telle que $x \longmapsto (-\sqrt{x}, \sqrt{x})$. *Y a-t-il une façon géométriquement pertinente d'illustrer le graphe de f ?*

Cependant, il ne faudrait pas que cette association d'idées soit un trop grand obstacle à la reconnaissance de ce qui les distingue. Ainsi, certains objets géométriques illustrés dans le plan cartésien, par exemple l'ellipse, ne représentent le graphe d'aucune fonction. De même que certaines fonctions, par exemple f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ telle que $f(x) = (-\sqrt{x}, \sqrt{x})$, ne se prêtent pas très bien à une illustration géométrique dans le plan cartésien[1] (**FIGURE 3**) !

Notre question initiale « y est-il la même chose que $f(x)$? » peut être abordée sous l'angle de la dualité entre ***notation*** et ***dénotation***, c'est-à-dire entre les symboles utilisés et la signification qu'on leur donne (voir **FIGURE 4**). Bien que y et $f(x)$ soient des arrangements de symboles différents, dénotent-ils la même idée ? On comprend que c'est le ***contexte*** qui rend le sens sans équivoque. Selon que l'on veuille parler d'objets géométriques ou de fonctions, la signification peut ne pas être la même.

Cependant, la notation $f(x)$ peut être analysée encore plus subtilement d'un point de vue dénotatif ou sémantique. Considérons les deux questions suivantes : le symbole f désigne-t-il une valeur (dépendante de x) ou une ***fonction*** ? Et si f dénote une fonction, qu'est-ce que cela veut vraiment dire ?

Pour la première question, il convient de clarifier selon le contexte. Prenons l'exemple classique suivant où, dans un même énoncé, deux significations différentes sont données à l'usage des parenthèses. Une définition possible de la continuité d'une fonction réelle f (à arguments réels) en un point a peut être exprimée ainsi : f est continue en a lorsque pour tout écart ε, il existe un écart $\delta(\varepsilon)$ tel que pour tout x (du domaine de f), si $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Notons que l'on peut tout aussi bien écrire $\delta(\varepsilon) = \delta$ sans ambiguïté[2], mais l'écriture $f(x) = f$ et $f(a) = f$ n'est clairement pas adéquate.

Cela nous mène à la seconde question, pour laquelle il nous faut déterrer les subtilités dénotatives ou sémantiques du terme ***fonction***.

1 Cet exemple peut paraître éloigné de la culture scolaire québécoise, mais il a pourtant été présenté par un élève de secondaire 5 (dans le cadre d'un projet de recherche) ; comme quoi les idées mathématiques peuvent heureusement s'infiltrer chez certains élèves malgré le programme de formation !

2 Jacques Labelle et Armel Mercier clarifient la signification : comme δ dépend généralement de ε, le «symbole $\delta(\varepsilon)$ indique que pour une valeur ε fixée, on cherche à déterminer un nombre δ en fonction de ε » (Labelle, J. et Mercier, A., 1993, p.85).

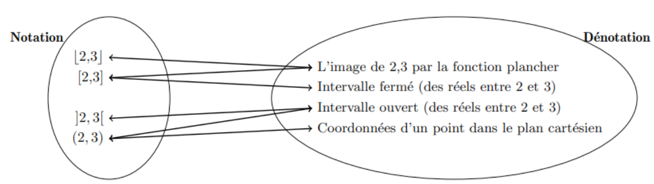


FIGURE 4

La dualité entre notation et dénotation ; un agencement symbolique peut être associé à différentes significations, de même qu'une idée mathématique peut être exprimée par diverses notations.

$f(x) \overset{?}{=} y$

$f(x)$ et y, est-ce bien la même chose ?

Une fonction, est-ce vraiment un cas particulier de relation ?

L'histoire nous apprend que plus les exemples de fonctions qui intéressaient les mathématiciens se diversifiaient, plus ces derniers devaient élargir leur définition du concept afin de les y inclure. Dans un souci de rigueur grandissant, cela a vraisemblablement mené à définir la fonction dans le contexte de la théorie des ensembles, l'assise communément admise sur laquelle reposent les idées mathématiques. Cependant, si ce sens est sans équivoque lorsqu'il s'agit de donner une définition « rigoureuse » dans un manuel scolaire ou académique, il n'est peut-être pas tout à fait celui que l'on a vraiment en tête dans d'autres contextes. Voici quelques manifestations de ce malaise quant au sens accordé à la fonction.

Étant donné deux ensembles A et B, W. Keith Nicholson (1993) écrira qu'un sous-ensemble $\alpha \subseteq A \times B$ est une fonction et notera cela par $\alpha : A \longrightarrow B$. Cette idée est en fait celle d'une fonction définie comme un cas particulier de relation (binaire), c'est-à-dire un sous-ensemble de couples (dans $A \times B$) ; autrement dit, les définitions d'une fonction et de son ***graphe*** coïncident. Mais l'auteur précise que cette définition n'est pas en accord avec la façon dont un mathématicien conçoit réellement la fonction et propose une définition « dans la pratique » (***working definition***) ; une fonction est une ***règle*** qui associe chaque a de A à un seul $\alpha(a)$ de B, notée $a \mapsto \alpha(a)$. Il indique que cela est ***la*** façon la plus utile et intuitive de concevoir les fonctions et est l'une des idées les plus fertiles en mathématique ; elle engage à préciser préalablement le domaine et le codomaine de α, puis à définir l'**action**[3] de la fonction α, c'est-à-dire à spécifier la valeur image $\alpha(a)$ associée à chaque a.

Robert G. Bartle et Donald R. Sherbert (1992) rappellent brièvement qu'à une autre époque, le mot fonction évoquait chez les mathématiciens une ***formule*** bien définie, mais le besoin d'une définition plus générale s'est fait ressentir afin d'inclure davantage de fonctions. Les auteurs proposent d'entrée de jeu une définition adaptée à l'usage courant, c'est-à-dire comme une ***règle de correspondance***, mais avouent que cette expression n'étant pas claire, ils se rallient à la définition en termes ensemblistes d'une fonction $f : A \longrightarrow B$ comme une relation, un sous-ensemble de couples tels que pour tout $a \in A$ il n'y a qu'un seul $b \in A$ tel que $(a, b) \in f$. Ils précisent le sens de la notation usuelle $b = f(a)$; cela signifie que (a, b) appartient à l'ensemble f. Or, les auteurs reviennent à la charge et suggèrent de visualiser une fonction comme une ***transformation***, ou encore une ***machine*** transformant x en $f(x)$ ou y en $f(y)$, ajoutant que cela clarifie la distinction entre f, la machine, et $f(x)$ ou $f(y)$, les résultats obtenus (***outputs***) après lui avoir donné x ou y.

Stephen Willard (1970) renchérit dans ce sens ; bien qu'il adhère également à la définition d'une fonction f comme sous-ensemble (relation) de $A \times B$, il indique qu'on écrit habituellement $b = f(a)$ plutôt que $(a, b) \in f$ et qu'une fonction est décrite par une règle pour déterminer $f(a)$ si a est connu ; cela reflète le point de vue commun qui est enclin à concevoir la fonction non pas comme un sous-ensemble statique de $A \times B$ (ou par une description géométrique ou autre de ce sous-ensemble), mais davantage comme une « boîte noire » qui prend un élément de A et « recrache » un élément de B.

Dans un effort de concilier une définition rigoureuse en termes ensemblistes et la conception de la fonction autrement qu'une relation, on retrouve celle-ci de Adina Calvo et Bernard Calvo (1996, p.15) : « Une application ou fonction f est un triplet $(X, Y, \mathcal{R})$ formé de deux ensembles X et Y et d'une relation fonctionnelle $\mathcal{R}$ entre X et Y. [...] $\mathcal{R}$ prend le nom de graphe de f. [...] Une relation $\mathcal{R}$ entre X et Y est dite fonctionnelle si pour chaque $x \in X$ il existe un seul $y \in Y$ tel que $x \mathcal{R} y$.»[4]

3 Le mot est également en caractères gras dans le texte original ; il semble qu'il y ait une idée importante sous-jacente à l'emploi de ce mot…

4 Il faut comprendre ici que « $x \mathcal{R} y$ » signifie $(x, y) \in \mathcal{R}$ dans un langage ensembliste.

Tout de même, l'interprétation du sens donné au mot ***fonction*** et à la notation utilisée doit se faire en contexte. Prenons un exemple : une ***suite*** est souvent définie comme une fonction f (de $\mathbb{N}$ dans un ensemble X). Conséquemment, les images $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, … ne forment pas une suite à proprement parler si l'on pense à une fonction comme une relation dans $\mathbb{N} \times X$ (bien que ce soit un peu l'idée qu'on se fait intuitivement d'une suite !). Cependant, si l'on associe chaque image $f(n)$ au couple $(n, f(n))$, l'ensemble de ces couples est bien la suite définie comme une fonction ! Parmi les autres notations usuelles pour une suite, on retrouve x_n en lieu et place de $f(n)$, ce qui évoque le sens du symbole x comme étant un élément de X (voir notamment Georges Skandalis (2001) ou Bartle et Sherbert (1992), ces derniers précisant que pour la suite $X : N \longrightarrow S$, on écrit plus souvent x_n à la place de $X(n)$). Cette tradition est également suivie par Labelle et Mercier (1993), pour lesquels la fonction est définie comme un cas particulier de relation, ce qui semble en accord avec leur notation $f = \{x_n\}$ pour désigner la suite f comme fonction.

Or, ce n'est pas parce qu'il y a une diversité à la fois notationnelle et sémantique autour de la notion de fonction qu'il n'y a pas d'usages erronés !

Erreurs ou non ?

Analysons quelques raisonnements classiques d'élèves à la lumière des interprétations possibles de la notation. En voici un exemple :

$$\begin{aligned} h(t) &= -3{,}5t^2 + 25t \\ h(4) &= -3{,}5(4)^2 + 25(4) \\ h(4) &= -56 + 100 \\ h &= 44 \end{aligned}$$

S'agit-il d'une erreur ? Si le sens donné au symbole h est celui du nom de la fonction, l'expression $h = 44$ est insensée. Mais si h est une valeur, disons la hauteur d'un projectile, et les parenthèses n'indiquent que la valeur dont elle dépend, alors il n'y a pas d'erreur et on aurait pu remplacer $h(t)$ ou $h(4)$ par h tout le long du raisonnement. Un peu comme dans cet autre exemple :

$$\begin{aligned} h(4) &= -3{,}5(4)^2 + 25(4) \\ h &= -56 + 100 \\ h &= 44 \end{aligned}$$

Le problème, c'est que si le sens n'est pas clarifié entre l'enseignante et l'élève, alors on ne peut dire s'il y a erreur ou non[5]. Si l'omission des parenthèses – et l'erreur sémantique qui en découle – peut sembler sans véritable importance, le manque de clarté (du point de vue de l'élève) peut agir comme obstacle et entraîner des erreurs ultérieurement, comme dans le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned} h(t) &= -3{,}5t^2 + 25t \\ h(4) &= -3{,}5(4)^2 + 25(4) \\ h(4) &= -56 + 100 \\ h(4) &= 44 \\ h &= 11 \end{aligned}$$

D'après la solution, le symbole « h » est conçu comme une valeur, mais les parenthèses semblent signifier que la valeur 4 est multipliée à h. Cette erreur est plus explicite dans le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned} f(x) &= 14x - 28 \\ f(7) &= 14(7) - 28 \\ \frac{f(7)}{7} &= \frac{70}{7} \\ f &= 10 \end{aligned}$$

En bref, il serait souhaitable que l'enseignante clarifie les choses avec ses élèves – cela fait partie d'un certain ***contrat didactique*** – et précise la signification des expressions (vocabulaire, notation, illustration) utilisées selon le contexte qui leur est présenté. En fait, on veut surtout éviter qu'un même mot ou symbole puisse être interprété différemment du sens dans lequel il a été employé.

5 Notons que dans les deux exemples ci-dessus, l'énoncé original du problème allait comme suit : « $h(t) = -3{,}5t^2 + 25t$, où le temps (t) est exprimé en secondes et la hauteur (h) en mètres. » (Guay, S. et Van MoorHem, 2008, p.91). Cependant, les raisonnements présentés par les élèves découlaient d'une reformulation personnelle précisant que « $h(t)$ est la hauteur » ; la signification implicite de « h », c'est-à-dire celle enseignée, était celle d'une fonction, pas d'une valeur !

$f(x) \stackrel{?}{=} y$ $f(x)$ et y, est-ce bien la même chose ?

Finalement, ça veut dire quoi « f » ?

Mauvaise question direz-vous ! En effet, f ne veut rien dire en soi, il ne s'agit que d'un symbole. Et justement, c'est plutôt le sens que l'on accorde à ce symbole qui doit être précisé. Et s'il s'agit d'une fonction, alors il faut que l'enseignant s'entende avec ses élèves sur le sens donné à cet objet.

S'il n'en tenait qu'à moi, je ne tenterais pas de donner une définition *formelle* du concept de fonction aux élèves, mais je préciserais ce que *fait* la fonction, son action. Pour être au goût du jour, ou plutôt de notre époque, « f » ne serait que le nom donné à cet animal qu'est la fonction, comme il est d'usage dans les langages de programmation ; je préconiserais d'ailleurs l'utilisation des parenthèses (de couleur rouge !) pour donner de la gueule à la fonction, qui « mange » x et « recrache » $f(x)$.

Pour renforcer cette conception, j'emploierais des illustrations comme ci-dessous ; la *commutativité du diagramme* (**Figure 5**) permet de préciser la signification de l'égalité, comme dans l'expression $f(x) = 2x - 3$. En effet, on a d'une part l'animal f qui fait quelque chose et obtient un résultat $f(x)$; d'autre part, la composition de fonctions « multiplier par 2 » et « soustraire 3 » permet d'obtenir le même résultat !

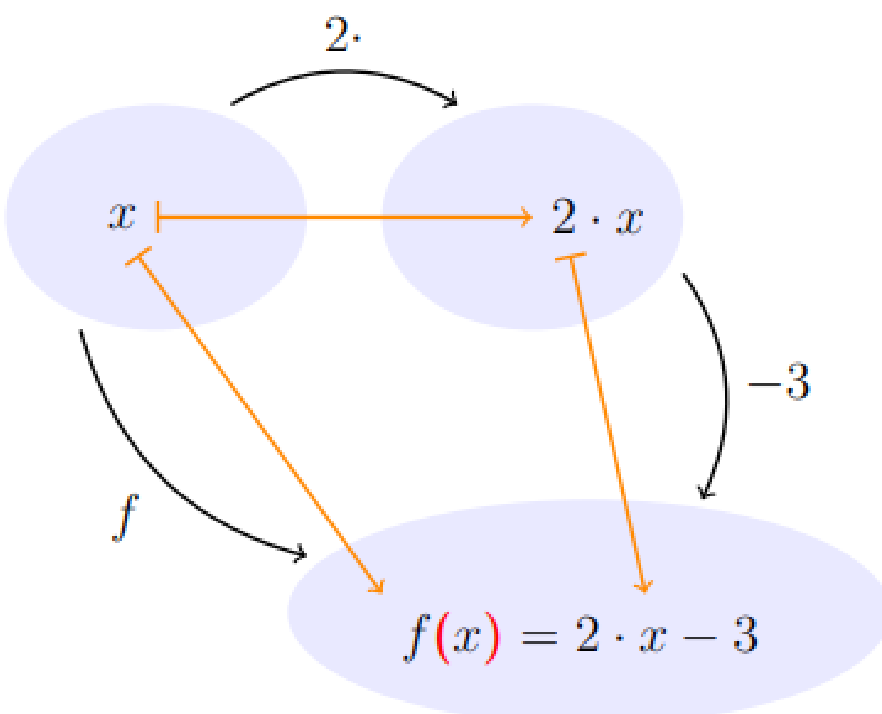


Figure 5
Un diagramme commutatif*, expression empruntée à la théorie des* catégories*,*
pour illustrer l'égalité $f(x) = 2x - 3$.

La distinction sémantique faite par Serge Lang (1986) entre les symboles « sin » et « sin* », qui sont les noms des fonctions qui associent un nombre (une mesure d'angle en radians et en degrés respectivement) à un nombre appelé ***sinus***, se visualise bien à l'aide de tels diagrammes commutatifs (voir **FIGURE 6**).

Je recommanderais également de nommer les fonctions par ce qu'elles font et non pas par ce qu'elles ont l'air lorsque l'on illustre leur graphe dans le plan cartésien. Par exemple, la fonction ***polynomiale de degré 2*** transforme un nombre x en effectuant une chaîne d'opérations de la forme (polynomiale) $ax^2 + bx + c$. De même, la fonction ***plancher*** ou ***partie entière*** nous donne le plus grand entier inférieur ou égal à x, c'est-à-dire son « plancher » ou sa « partie entière ». On peut illustrer le graphe de ces fonctions dans le plan cartésien et réaliser après coup que cela a l'allure d'une parabole ou d'un escalier.

Si toutes ces distinctions sémantiques semblent cloisonner les différents objets mathématiques, ce n'est évidemment pas l'intention. Le but est de clarifier le sens des objets dans un contexte qui leur est propre, et surtout de laisser aux élèves le plaisir de découvrir eux-mêmes les liens qui unissent ces objets afin qu'ils puissent construire plus solidement leur compréhension de la structure du monde des idées mathématiques.

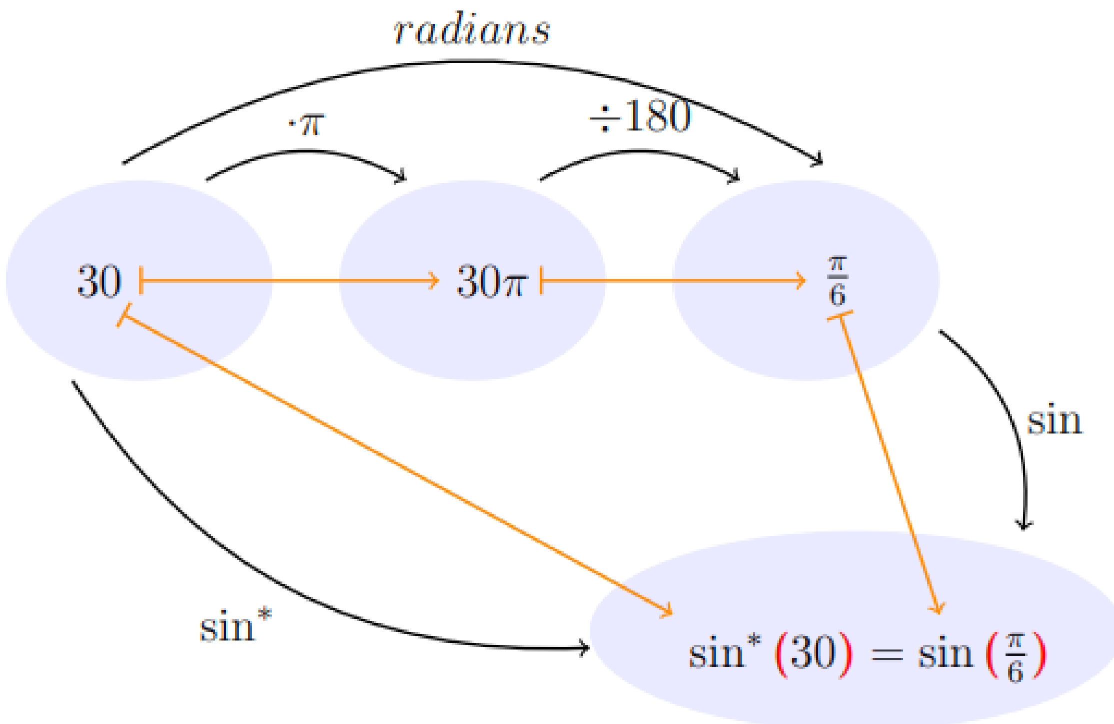


FIGURE 6
Notons ci-dessus que radians est bien le nom de la fonction ;
on a donc radians (30) = (30) $\cdot \pi \div 180$
par commutativité des diagrammes.

Références

Bartle, R.G. et Sherbert, D.R. (1992). ***Introduction to real analysis (2nd ed.)***. New York : John Wiley & Sons.

Calvo, A. et Calvo, B. (1996). ***Algèbre générale***. Paris : Masson.

Guay, S. et Van Moorhem, A. (2008). ***Point de vue – Mathématique 2e cycle du secondaire, 2e année***. Laval : Éditions Grand Duc.

Labelle, J. et Mercier, A. (1993). ***Introduction à l'analyse réelle***. Montréal : Modulo Éditeur.

Lang, S. (1986). ***A First Course in Calculus (Fifth Edition)***. New York : Springer-Verlag.

Nicholson, W. K. (1993). ***Introduction to Abstract Algebra***. Boston : PWS Publishing Company.

Skandalis, G. (2001). ***Topologie et analyse 3e année***. Paris : Dunod.

Willard, S. (1970). ***General Topology***. Mineola : Dover Publications, Inc.

Patrick Viau
Retraité du CSS de Montréal
viaup.article@gmail.com

La loi d'Ohm

La loi d'Ohm est importante en science de 4e secondaire. Pourquoi l'écrire « $U = RI$ »? Quelle est la variable indépendante? Quelle est la variable dépendante? Réflexions et implications didactiques

Introduction

Lors d'une journée pédagogique sur l'évaluation des apprentissages, j'ai proposé l'exemple du laboratoire sur la loi d'Ohm commun aux cours d'Applications technologiques et scientifiques et Science et technologie. En discutant, nous avons remarqué que nous n'avions pas tous la même variable indépendante en tête.

Le problème

« $U = RI$ » ressemble à $y = ax$ et laisse croire que l'intensité du courant serait la variable indépendante, la tension serait la variable dépendante et la résistance serait, comme par magie, le taux de variation.

Cette apparente logique mathématique se retrouve dans les manuels ***Observatoire*** et ***Synergie***, dans le site Allo prof et même dans l'épreuve unique de juin dernier. Pourtant, c'est scientifiquement faux, à part le fait qu'il y ait bel et bien une relation directe entre deux variables.

$$U = RI$$

Les faits

Revenons au circuit électrique. La source (la pile) fournit d'abord l'énergie aux charges électriques puis les charges circulent ensuite un certain temps. La variable indépendante est donc la tension et la variable dépendante est alors l'intensité du courant. Par analogie, il faut étirer un élastique si on veut le mettre en mouvement.

C'est I qui est directement proportionnel à U et le taux de variation est la conductance. On enseignait ça avec le programme précédent *Sciences physiques 416-436*. La conductance quantifie la conduction. Si la conduction est réduite, on parle de résistance. La résistance est alors l'inverse de la conductance.

Selon $y = ax$, $I = \frac{U}{R}$. Pourquoi ne pas l'écrire ainsi ? Parce que R est sur une autre ligne? Parce que le dénominateur est plus difficile à isoler ? Étant donné que les élèves de Science et technologie doivent aussi utiliser $c = \frac{m}{V}$ pour la concentration d'une solution aqueuse, je pense rentable d'investir dans l'enseignement pour isoler le dénominateur. D'autant plus qu'une autre équation d'électricité gagnerait à être écrite avec un dénominateur : « $E = Pt$ ». En Physique mécanique, la puissance est le rapport du travail sur le temps. Donc, $P = \frac{E}{t}$ respecte cela.

Une solution

Pour isoler le dénominateur, partons de $3 = \frac{6}{2}$. Demandons aux élèves comment arriver à 2? Quand ils répondent en divisant 6 par 3, revenons à $I = \frac{U}{R}$. Demandons aux élèves comment arriver à R ? Souhaitons qu'ils répondent en divisant U par I.

Conclusion

Je comprends que ce soit tentant d'inverser les axes x et y pour arriver tout de suite à la résistance, mais je préfère suivre l'utilisation des mathématiques en science telles que vues par les élèves.

Références

Allo prof. (2022). ***La loi d'Ohm***. https://www.alloprof.qc.ca/fr/eleves/bv/sciences/la-loi-d-ohm-s1164.

Couture, I. et Peyronnet, O. (2009). ***Synergie***. GRAFICOR.

Cyr, M.-D., Forget, D. et Verreault, J.-S. (2008). ***Observatoire L'environnement***. ERPI.

Ministère de l'Éducation. (2022). ***Science et technologie Épreuve écrite***. Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation. (1990). ***Sciences physiques 416-436***. Gouvernement du Québec.

Autre lecture

Laboratoires, graphiques et équations, ***ENVOL no 141***, 15-16.

Opti Math du [m^s] 20

Concours

Les Finalistes Opti-Math 2023

L'édition Opti-Math 2023 se déroulera comme prévu **le mercredi 22 mars 2023**. Les responsables d'une inscription devront sélectionner un maximum de 9 copies parmi les participants à **Opti-Math** (1re, 2e et 3e secondaire) et un maximum de 6 copies parmi les participants à **Opti-Math +** (4e et 5e secondaire).

Les PRIX et BOURSES remis aux finalistes Opti-Math 2023

Le comité remettra les 50 prix de performance (pour les 10 premières positions par niveau) et les 80 prix de participation (16 prix par niveau, au hasard, parmi tous les finalistes dont la copie a été envoyée à la correction nationale)

Les 22 bourses universitaires annoncées seront également attribuées. En voici la description :

Bourses remises par l'Université Laval :

Quatre bourses en 5e secondaire, deux bourses en 4e secondaire et une bourse en 3e secondaire. L'Université Laval remettra également deux bourses pour les participants de la région 03 (Capitale-Nationale). Une bourse à la personne gagnante de 5e secondaire du secteur public et une autre à la personne gagnante du secteur privé.

Bourses remises en région par les constituantes de l'Université du Québec :

R-02 : UQAC (2)

R-06 : UQÀM (4)

R-01, R-09, R-11, R-12 : UQAR (4)

R-04, R-17 : UQTR (2)

Bourse remise par l'Université d'Ottawa :
R-07 (1)

Le CAHIER des résultats Opti-Math 2023

Les noms des 150 premiers finalistes par niveau qui ont reçu un certificat de distinction, ainsi que tous les gagnants des prix de performance, des prix de participation et les récipiendaires des bourses universitaires sont identifiés dans le **Cahier des résultats Opti-Math 2023** disponible sur le site à l'adresse www.optimath.ca.

Sincères remerciements
à tous les responsables d'une inscription
qui ont rendu possible cette activité enrichissante
dans plus de 150 institutions secondaires,
autant publiques que privées.
Sans votre implication,
le concours Opti-Math ne pourrait se réaliser.

023

35e édition

MERCREDI LE 22 MARS 2023

Les prix et bourses Opti-Math 2023 annoncés dans le Cahier des Résultats sur le site à l'adresse www.optimath.ca seront remis aux finalistes.

QUELQUES PRIMEURS OPTI-MATH 2024, 36E ÉDITION

CETTE 36E ÉDITION SE TIENDRA LE MERCREDI 20 MARS 2024

UNE ACTIVITÉ OFFERTE À TOUS LES ÉLÈVES DU SECONDAIRE
DES MISES EN SITUATION DE PROBLÈMES À RÉSOUDRE POUR LE PLAISIR

Augmentez la visibilité de votre institution !
Ajoutez cette activité à votre offre de service !
Inscrivez votre école à Opti-Math 2024

FAITES PARTICIPER LES ÉLÈVES DE VOTRE ÉCOLE QUI AIMENT RELEVER CE GENRE DE DÉFI.

LE CAHIER D'INSCRIPTION OPTI-MATH 2024 SERA PUBLIÉ EN SEPTEMBRE 2023, IL ANNONCERA LES PARTICULARITÉS DE CETTE 36E ÉDITION. IL Y AURA DES NOUVEAUTÉS...

VISITEZ NOTRE SITE INTERNET : WWW.OPTIMATH.CA

Vous pouvez contribuer

à la banque de questions pour une prochaine édition du Concours Opti-Math

VOICI LES CONDITIONS :
Le comité alloue un montant de 100 $ par situation retenue pour une prochaine édition du concours. Les personnes qui manifesteront leur intérêt recevront les informations complémentaires.

Acheminer votre proposition par courriel au secrétariat du concours : opti-math@videotron.ca.
Un suivi rapide sera accordé.

VISITEZ NOTRE SITE INTERNET : WWW.OPTIMATH.CA

SECRÉTARIAT OPTI-MATH : 450-471-4960 COURRIEL : OPTI-MATH@VIDEOTRON.CA

Sylvain Vermette
Professeur, UQTR
sylvain.vermette@uqtr.ca

Mathieu Séguin
Chargé de cours, UQTR
mathieu.seguin@uqtr.ca

La complétion et la fonction

L'un des deux fondements que l'on retrouve au sein du référentiel d'intervention en mathématique est de « donner du sens à la mathématique en s'appuyant sur la compréhension des concepts et des processus mathématiques » (MEES, 2019, p.1). Dans le cadre de cet article, nous proposons de réfléchir en ce sens au regard du concept de la complétion du carré. Celle-ci comporte de nombreuses utilités en algèbre, elle peut intervenir notamment au moment venu de factoriser un polynôme du second degré. En effet, si nous voulons factoriser par exemple un trinôme général $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$ en appliquant dans un premier temps la technique somme-produit, il peut être difficile, voire même impossible, de trouver les deux nombres dont la somme est $\mathbf{b}$ et le produit est $\mathbf{ac}$. En particulier si les deux nombres ne correspondent pas à des entiers, ce qui est le cas par exemple pour le polynôme $2x^2 + 17x + 11$ où il faut trouver deux nombres dont la somme est égale à 17 et le produit est égal à 22. La complétion du carré permet alors de déterminer si un trinôme peut être factorisé et, si c'est le cas, de trouver les deux facteurs. Souvent présentée comme une méthode de factorisation, elle nous apparaît davantage comme une procédure préliminaire à une méthode de factorisation. En fait, la ***forme factorisée*** d'une expression consiste à la représentation de cette expression sous la forme d'un produit de plusieurs facteurs, par opposition à la ***forme développée*** qui est le résultat du produit de tous ces facteurs. Ainsi, une méthode de factorisation caractérise une opération qui consiste à décomposer un nombre ou une expression en plusieurs facteurs, ce qui n'est pas le cas lorsque l'on complète le carré. Dans ce sens, la complétion de carré n'est pas vraiment une méthode de factorisation, l'objectif étant de compléter le carré afin de pouvoir ensuite faire ressortir les facteurs en jeu par association à l'une des identités algébriques remarquables du second degré liées à un trinôme carré parfait de la forme

n du carré
quadratique

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.[1] Au même titre, la technique somme-produit qui permet de trouver une expression algébrique équivalente à un trinôme, mais comportant cette fois quatre termes en décomposant le terme bx en deux nombres trouvés, n'est pas non plus une méthode de factorisation. Il s'agit une fois de plus ici d'une étape préliminaire permettant par la suite un groupement de termes qui mènera à ce qu'on qualifie de double mise en évidence.

Au regard de ce qui précède, il est aisé de concevoir l'intérêt pour la complétion de carré au moment venu de faire l'étude de la fonction quadratique. Lors de l'enseignement de la fonction quadratique, l'un des enjeux est bien entendu de composer avec le fait qu'il est possible d'écrire sa règle sous différentes formes. La forme canonique $f(x) = a(x - h)^2 + k$ apparaît avantageuse pour différentes raisons. D'abord, elle met en évidence le sommet de la parabole à partir des paramètres h et k présents dans la règle, ce qui permet, jumelé au signe du paramètre a qui nous informe sur l'orientation de la courbe et sur son étirement vertical, de tracer rapidement une esquisse relativement précise de la courbe associée à la règle. Elle met également en évidence différentes propriétés obtenues à partir du sommet comme les extremums, l'axe de symétrie ou la variation de la fonction. Pour ce qui est de résoudre une équation sous sa forme canonique, notamment lors de la recherche des zéros, il est relativement aisé d'y parvenir en isolant la variable x à partir de différentes manipulations algébriques permettant de créer des équations équivalentes.

1 À noter que la différence de deux carrés $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ constitue également une identité remarquable du second degré.

La forme générale $f(x) = ax^2 + bx + c$ quant à elle peut paraître plus complexe et avoir moins d'intérêts en comparaison avec la forme canonique. Il est vrai que la forme générale met de l'avant l'ordonnée à l'origine qui correspond à la valeur du paramètre c, mais il faut avouer qu'il est aussi aisé de l'obtenir à partir de la forme canonique en substituant x par la valeur de 0. Le défi sous cette forme peut être à deux niveaux. D'abord, comme illustré en quelque sorte plus tôt, la connaissance du sommet de la parabole peut être d'une grande utilité lors de l'étude de la fonction et celui-ci n'est pas directement accessible à partir de la forme générale. Ensuite, il devient difficile de résoudre une équation exprimée sous cette forme puisque l'on retrouve la variable x au sein de deux termes qui ne sont pas semblables. Ainsi, c'est souvent au moment venu de répondre à ces besoins que la complétion du carré intervient lors de l'étude de la fonction quadratique. Attardons-nous maintenant à ceux-ci.

La recherche du sommet par complétion du carré

Le premier enjeu étant de retrouver le sommet de la parabole à partir de la forme générale, celui-ci impose implicitement de retrouver la forme canonique à partir de la forme générale. Dis autrement, comment retrouver la valeur des paramètres h et k à partir de ceux exprimés dans la forme générale soit les paramètres a, b et c. Ici, il est possible d'y arriver à l'aide de la complétion du carré. D'ailleurs, selon notre expérience, il s'agit souvent de la façon de l'enseigner afin de trouver que :

$$h = -\frac{b}{2a} \text{ et } k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Sur le site internet ***alloprof***, organisme d'aide aux devoirs qui offre gratuitement ses services à tous les élèves du primaire et du secondaire du Québec, on indique d'ailleurs que ces deux formules sont obtenues à partir de la forme générale $ax^2 + bx + c$ en utilisant la méthode de factorisation appelée la complétion du carré.[2] La démonstration n'est cependant pas

2 https://www.alloprof.qc.ca/fr/eleves/bv/mathematiques/les-formes-d-ecriture-de-la-fonction-polynomiale-m1126

La complétion du carré et la fonction quadratique

présentée. On voit ici toutefois l'intérêt de la complétion du carré pour passer d'une forme à l'autre. Partant de la forme générale, se servir de cette technique permet de créer un trinôme carré parfait. La factorisation du trinôme obtenu à l'aide de l'une des identités remarquables mène ensuite à la forme recherchée, ce qui rend possible la comparaison.

$$f(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} \longrightarrow f(x) = \mathrm{a}(x - \mathrm{h})^2 + \mathrm{k}$$

$f(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$	Forme générale
$f(x) = \mathrm{a}(x^2 + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}x + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}})$	Mise en évidence simple du paramètre **a**
$f(x) = \mathrm{a}(x^2 + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}x + \frac{\mathrm{b}^2}{4\mathrm{a}^2} - \frac{\mathrm{b}^2}{4\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}})$	Complétion du carré
$f(x) = \mathrm{a}[(x + \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}})^2 - \frac{\mathrm{b}^2}{4\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}]$	Factorisation au regard d'une identité remarquable (trinôme carré parfait)
$f(x) = \mathrm{a}[(x + \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}})^2 + \frac{4\mathrm{ac} - \mathrm{b}^2}{4\mathrm{a}^2}]$	Mise sur le même dénominateur des termes constants
$f(x) = \mathrm{a}(x + \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}})^2 + \frac{4\mathrm{ac} - \mathrm{b}^2}{4\mathrm{a}}$	Distributivité du paramètre **a**

En comparant cette dernière ligne avec la forme canonique $f(x) = \mathrm{a}(x - \mathrm{h})^2 + \mathrm{k}$, on peut déduire que :

$$\mathrm{h} = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}} \text{ et } \mathrm{k} = \frac{4\mathrm{ac} - \mathrm{b}^2}{4\mathrm{a}}$$

La formule quadratique par complétion du carré

Attardons-nous maintenant au second enjeu présenté, soit celui d'être en mesure de résoudre une équation quadratique sous sa forme générale. Cette résolution intervient notamment lors de la recherche des zéros de la fonction. Si cette résolution suit la recherche du sommet qui précède, il serait bien entendu possible de poursuivre avec la forme canonique. Mais trouver le sommet n'est pas une nécessité selon la situation problème présentée et donc, il peut être intéressant d'y avoir directement accès, sans devoir trouver préalablement le sommet. Dans bien des cas, on met de l'avant ici la règle du produit nul. Cette règle dit que le produit de deux ou plusieurs facteurs est égal à 0 si et seulement si l'un de ces facteurs est égal à 0. Toutefois, afin d'appliquer cette règle, il faut préalablement être en mesure de factoriser le trinôme et comme mentionné précédemment, mettre de l'avant la technique somme-produit peut être complexe dans certains cas, d'où l'intérêt une fois de plus pour la complétion du carré. D'ailleurs, en conservant les paramètres **a**, **b** et **c**, son application mène à la formule quadratique comme l'illustre la démonstration qui suit :

$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$	Forme générale
$x^2 + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}x + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}} = 0$	Équation équivalente suite à la division de chacun des termes par la valeur du paramètre **a**
$x^2 + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}x = -\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$	Équation équivalente en soustrayant à chaque membre de l'égalité la valeur du paramètre $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$
$x^2 + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}x + \frac{\mathrm{b}^2}{4\mathrm{a}^2} = \frac{\mathrm{b}^2}{4\mathrm{a}^2} - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$	Complétion du carré
$(x + \frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}})^2 = \frac{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}{4\mathrm{a}^2}$	Factorisation au regard d'une identité remarquable (trinôme carré parfait) pour le membre de gauche et mise sur le même dénominateur pour le membre de droite

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Équation équivalente en extrayant la racine carrée à chaque membre de l'égalité

$$x = -\frac{b}{2a} \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Équation équivalente en soustrayant à chaque membre de l'égalité la valeur du paramètre $\frac{b}{2a}$

Il est ensuite possible d'appliquer une propriété des radicaux afin de permettre d'exprimer le membre de droite sous un même dénominateur.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} \longrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Trouver les formules à partir de la forme canonique

Les démonstrations qui précèdent partent de la forme générale. Il s'agit là du « chemin » préconisé par plusieurs enseignants selon notre expérience. Il faut toutefois réaliser qu'il est aussi possible de trouver les formules recherchées, mais en partant cette fois de la forme canonique. En raisonnant ainsi, on fait en quelque sorte le chemin inverse que celui fait précédemment pour retrouver les formules permettant de retrouver les coordonnées du sommet. En effet, plutôt que de chercher à factoriser la forme générale afin de permettre une comparaison avec la forme canonique, nous allons plutôt développer la forme canonique afin de permettre une comparaison avec la forme générale.

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$
$$f(x) = a((x - h)(x - h)) + k$$
$$f(x) = a((x^2 - 2hx + h^2)) + k$$
$$f(x) = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k$$

Une fois développée, la comparaison devient possible. D'abord, on constate que le premier terme obtenu est identique à celui que l'on retrouve au sein de la forme générale. Pour ce qui est du second terme, le terme en x, le coefficient $\mathbf{b}$ est venu substituer $-2\mathbf{ah}$. On est donc en mesure d'isoler le paramètre $\mathbf{h}$ en divisant chaque membre de l'égalité par $-2\mathbf{a}$.

$$b = -2ah$$
$$h = -\frac{b}{2a}$$

De la même façon, le paramètre $\mathbf{c}$ de la forme générale vient substituer l'expression $\mathbf{ah}^2 + \mathbf{k}$. En soustrayant chaque membre de l'égalité par $\mathbf{ah}^2$, on isole le paramètre $\mathbf{k}$.

$$c = ah^2 + k$$
$$k = c - ah^2$$

Afin d'être en mesure de retrouver la valeur du paramètre $\mathbf{k}$ uniquement à partir des paramètres $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ présents dans la forme générale, il faut continuer et substituer la valeur de $\mathbf{h}$ dans l'équation. Sachant que $\mathbf{h} = -\frac{b}{2a}$, il suffit ensuite de développer l'expression obtenue et de mettre chaque terme sur le même dénominateur afin d'obtenir la formule désirée.

$$k = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$k = c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$k = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Il est aussi possible de retrouver la formule quadratique $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ à partir de la forme canonique.

$f(x) = a(x - h)^2 + k$ Forme canonique

$0 = a(x - h)^2 + k$ Définition de zéros

$-k = a(x - h)^2$ Équation équivalente en soustrayant chaque membre de l'égalité par $\mathbf{k}$

$-\frac{k}{a} = (x - h)^2$ Équation équivalente en divisant chaque membre de l'égalité par $\mathbf{a}$

$\pm\sqrt{-\frac{k}{a}} = x - h$ Équation équivalente en extrayant la racine carrée à chaque membre de l'égalité

$h \pm\sqrt{-\frac{k}{a}} = x$ Équation équivalente en additionnant chaque membre de l'égalité par $\mathbf{h}$

La complétion du carré et la fonction quadratique

Mais dans le même sens que la démonstration qui précède, comme l'objectif est d'y arriver sans trouver préalablement les valeurs correspondant au sommet, et donc à partir uniquement des paramètres **a**, **b** et **c** présents dans la forme générale, il faut poursuivre les manipulations algébriques ici en substituant les valeurs de **h** et **k** par leur valeur exprimée à partir des paramètres désirés soit $\mathbf{h} = -\frac{b}{2a}$ et $\mathbf{k} = \frac{4ac - b^2}{4a}$.
On obtient alors :

$-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{4ac - b^2}{4a{*}a}} = x$	Substitution
$-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}} = x$	Distributivité de la négation
$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x$	Commutativité des termes sur l'addition et propriété des radicaux
$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x$	Addition de fractions

Pour conclure, bien que la plupart des élèves finissent par apprendre ces algorithmes qui leur sont enseignés, il n'en demeure pas moins que leur compréhension conceptuelle reste dans bien des cas déficiente. Quand un algorithme est vu comme une série d'étapes vide de sens, les élèves peuvent oublier certaines de ces étapes, les changer de façon à ce que leur application mène à des erreurs ou simplement ne pas être en mesure de reconnaître le contexte qui justifie leur utilisation. Étant bien conscients du défi que représente l'enseignement de la complétion de carré, nous pensons qu'il est primordial de continuer à réfléchir à des pistes pour enrichir l'expérience d'apprentissage de ce concept chez les élèves afin de contribuer au développement d'une conceptualisation plus riche de cette technique.

Référence

Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES). (2019). Référentiel d'intervention en mathématique. Québec : Gouvernement du Québec.

François Pomerleau
Enseignant C.S. Beauce-Etchemin
Membre du C.A. du GRMS
fpomerleau@grms.qc.ca

Session de création du GRMS 2023

En 2017, une idée folle m'est venue : donner du temps à des crinqué(e)s de mathématiques pour se rencontrer et créer des activités pour nos élèves. Ces activités seraient partagées à l'ensemble des membres du GRMS. Vous allez dire qu'il n'y a rien de nouveau sous le soleil. Toutefois, le GRMS assume tous les frais reliés à cette activité, et ce, pour environ 25 personnes. Que l'on parle des libérations, de l'hébergement, des repas et les déplacements, tous les frais sont sur le bras du GRMS !

En 2018, la première session de création avait lieu à la station touristique Duchesnay suivi d'une 2e session à Saint-Paul-de-l'Île-aux-Noix en 2019. À quelques jours de la 3e session… la pandémie arrive! Ce n'est que partie remise, la 3e session est de retour en 2023. Finalement, une vingtaine de personnes peuvent enfin se donner rendez-vous à Trois-Rivières pour 2 jours intenses de créativité.

Vous aimeriez participer à cette activité de votre association?

Soyez à l'affût de nos publications sur notre page FACEBOOK puisqu'il y aura assurément une 4e édition en 2024. Que faut-il pour y être invité? Avoir une idée qui mijote dans notre esprit et qu'on n'arrête pas de remettre parce qu'on manque de temps ou qu'on aimerait la développer en équipe. Vous proposez votre projet et un comité sélectionne les activités qui semblent les plus intéressantes à réaliser dans un délai de 2 jours, parce que le but, c'est d'avoir un produit fini après ces 2 jours de création intensive.

Le déroulement de la session est assez simple. On arrive la veille de la session, on fraternise et commence déjà à créer des liens qui resteront pour quelques années, je peux vous l'assurer. La première journée, on propose les différents projets retenus et des équipes se forment afin de se mettre à la tâche. Il est même très souvent assez difficile d'arrêter le travail des gens pour pouvoir souper et continuer de jaser et de fraterniser.

La deuxième journée, on finalise le projet, ou commence une 2e idée, pour ensuite présenter le tout aux membres présents. Juste entendre les exclamations ou l'enthousiasme suscités prouve que cette activité est essentielle pour les années futures.

Cette année, c'est entre 21 et 23 personnes qui se sont mobilisées pour proposer différentes activités qui seront assurément utilisées dans plusieurs classes du Québec. Un total de 6 activités et sous-activités sont disponibles dans la section Ressources du site Web du GRMS.

Les différentes activités créées :

1. **Télémathimage**
   Jeux portant sur le vocabulaire mathématique
2. **Opérations sur les entiers et la pensée algébrique avec Scratch**
3. **Activité sur l'optimisation** selon la philosophie de la classe collabo-réflexive
4. **Mesurer l'inaccessible…** avec les mathématiques
   Activité impliquant l'utilisation de la trigonométrie ou les triangles semblables
5. **Enseigner dehors**
   Piste d'enseignement afin de décloisonner notre enseignement.
6. **Outils de prise d'infos en maths**
   pour favoriser le jugement professionnel

Vous voulez être des nôtres en 2024 ?

Commencez à réfléchir à un de vos besoins et surveillez nos annonces prochaines.

Retour sur la 49e session de perfectionnement

François Pomerleau
Enseignant C.S. Beauce-Etchemin
Membre du C.A. du GRMS
fpomerleau@grms.qc.ca

La 49e édition de notre congrès annuel a eu lieu en présentiel et fut un succès pour le nombre de participants. Quelques statistiques impressionnantes : 460 participants en présentiel, 110 participants en ligne, 58 ateliers différents et 75 animateurs ou coanimateurs!

Malgré 2 années de virtuel, les gens ont été au rendez-vous. Encore une fois, nous avons dû écourter la période d'inscription. Vous devrez donc talonner davantage vos directions afin de pouvoir assister à VOTRE congrès l'an prochain.

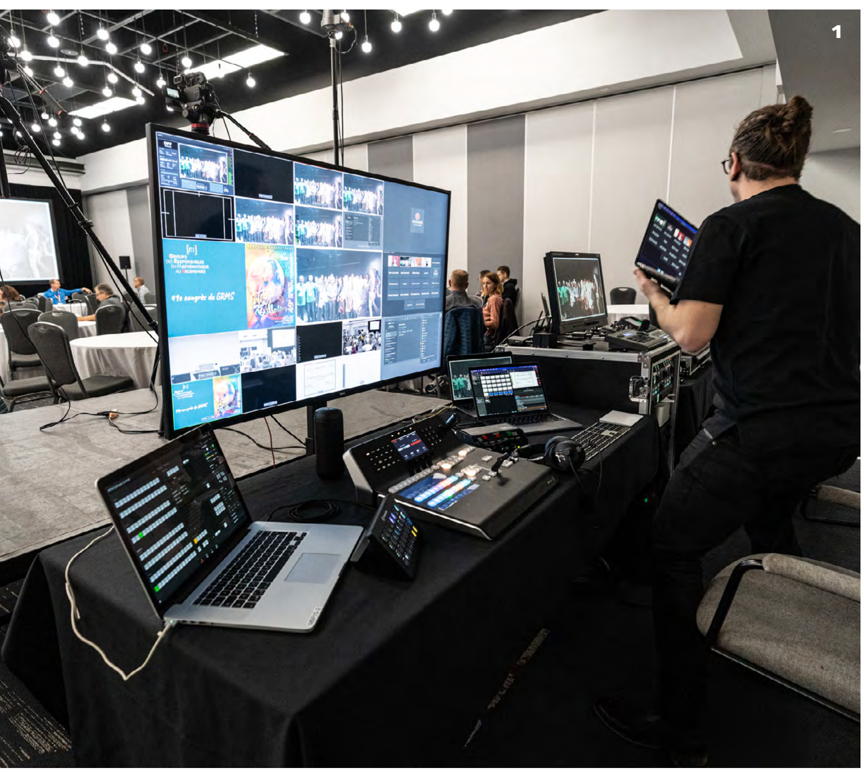
Rappel : Suivez nos activités sur notre page FACEBOOK : GRMS-Groupe des Responsables en Mathématique au Secondaire.

Mode hybride

Le GRMS a encore une fois innové puisque M. Stéphane Hunter et son équipe d'Escouade Multimédia ont été mandatés afin d'offrir à nos membres certains des ateliers en mode virtuel tout en les offrant en présentiel. De cette façon, des gens d'Alberta et de l'Ontario ont pu nous suivre à distance. Nous sommes heureux d'annoncer le retour de ce service pour 2023. (Photo 1)

Les ateliers

Encore une fois, nos animatrices et nos animateurs ont offert des ateliers variés à nos membres : en passant du ludique au pédagogique, de la programmation à l'évaluation et de la mise en bouche à la mise en pratique. Les nombreux ateliers permettent encore une fois de devenir de meilleurs leaders pédagogiques et vous trouverez certaines présentations dans le padlet du congrès, sur le site du GRMS, sous l'onglet « Événements ». (Photo 2)


1


2

Les exposants

Plusieurs exposants étaient présents et ont pu présenter leurs nouveautés pédagogiques ou ludiques à l'ensemble des congressistes présents à notre session. L'engouement de nos membres était palpable sur le plancher.

Les récompenses

Plusieurs prix ont été remis à des personnes s'étant démarquées pendant la dernière année. Le GRMS et ses partenaires profitent de ce moment pour récompenser des personnes inspirantes et innovantes. **M. André Boileau** (photo 3) s'est mérité le prix Richard Pallascio pour les différents articles qu'il a publiés dans notre revue Envol. **Mme Nathalie Allard-Mousseau** et **M. Mathieu Tremblay** (photo 4)


4

se sont mérités le prix Fermat pour leur scénario d'enseignement dynamique « La grande roue de Montréal ». **M. Elyes Guitouni**, élève de 5e secondaire a remporté le concours Opti-Math (photo 5). Finalement, **M. Pierre Couillard** et **M. Jocelyn Nicol** (photo 6) ont remporté chacun le prestigieux prix Claude Janvier. Exceptionnellement, ce dernier prix a été remis à deux personnes distinctes puisque pendant la pandémie, il n'a pas été possible de remettre ce prix.

Les prix Castelnuevo, remis aux universitaires, ont été remis à **Émilie Manceau** (U de S), **Marie-Ève Guillemette** (UQTR), **Kévin Thibeault-Boudreault** (UQAC), **Patrick Dessureault** (UQAT), **Guillaume Grenier-Langlois** (U de M), **Pierre-Étienne Garneau** (ULaval) et **Sébastien Jacques** (UQAM).

On se donne rendez-vous les 26 et 27 octobre prochains à Victoriaville. Encore une fois, le GRMS se donne le mandat de vous préparer une session de perfectionnement des plus enrichissantes.


3

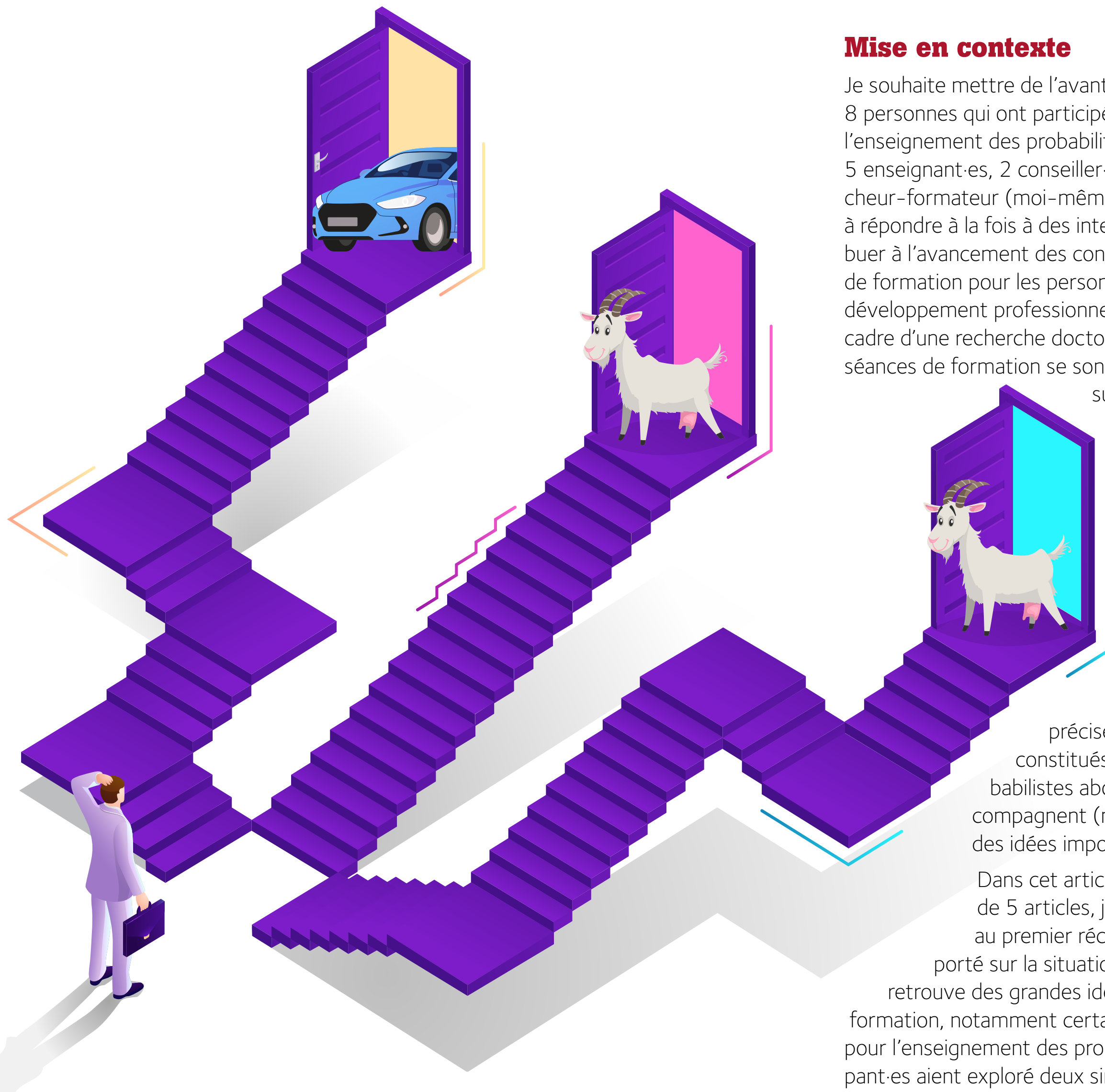

5


6

Mathieu Thibault
Professeur en didactique des mathématiques (UQO)
mathieu.thibault@uqo.ca
@ThibaultMat

Récit #1 d'une recherche-formation à l'enseignement des probabilités avec des outils technologiques :

Monty Hall



Mise en contexte

Je souhaite mettre de l'avant les réflexions menées par 8 personnes qui ont participé à une recherche-formation à l'enseignement des probabilités avec des outils technologiques : 5 enseignant·es, 2 conseiller·ères pédagogiques et un chercheur-formateur (moi-même). Une recherche-formation vise à répondre à la fois à des intentions de recherche, pour contribuer à l'avancement des connaissances, puis à des intentions de formation pour les personnes qui y participent en quête de développement professionnel. Celle-ci a été menée dans le cadre d'une recherche doctorale (Thibault, 2021a). Les cinq séances de formation se sont déroulées à intervalles réguliers sur une période d'environ sept mois. Cinq récits de formation de cinq à huit pages ont ainsi été rédigés (disponibles à l'annexe F de Thibault, 2021a) par le chercheur-formateur après chacune des séances, puis envoyés aux participant·es en vue d'être discutés à la séance suivante. On y retrouve plusieurs exemples des réflexions et discussions qui ont émergé des séances. Plus précisément, ces récits de formation sont constitués d'un itinéraire des situations probabilistes abordées, des ressources qui les accompagnent (matériel, simulateurs, etc.) ainsi que des idées importantes qui ont émergé en séance.

Dans cet article, le premier d'une série envisagée de 5 articles, je présente les réflexions associées au premier récit de formation, qui a notamment porté sur la situation probabiliste de Monty Hall. On y retrouve des grandes idées évoquées lors de la séance de formation, notamment certains rôles des outils technologiques pour l'enseignement des probabilités, après que les participant·es aient exploré deux simulateurs.

Monty Hall

À la première séance de formation, les participant·es ont d'abord expérimenté la situation de Monty Hall, dont l'énoncé est présenté dans la **FIGURE 1**.

PROBLÈME DE MONTY HALL

Vous êtes en face de trois portes. Deux cachent une chèvre, et l'autre une superbe voiture! Vous devez d'abord désigner une porte. Le directeur du jeu ouvre une porte qui n'est PAS celle choisie par le joueur, NI une porte cachant la voiture (il sait ce qu'il y a derrière chaque porte). Vous devez alors faire un choix :

A) ouvrir la porte choisie initialement;

B) ouvrir la troisième porte.

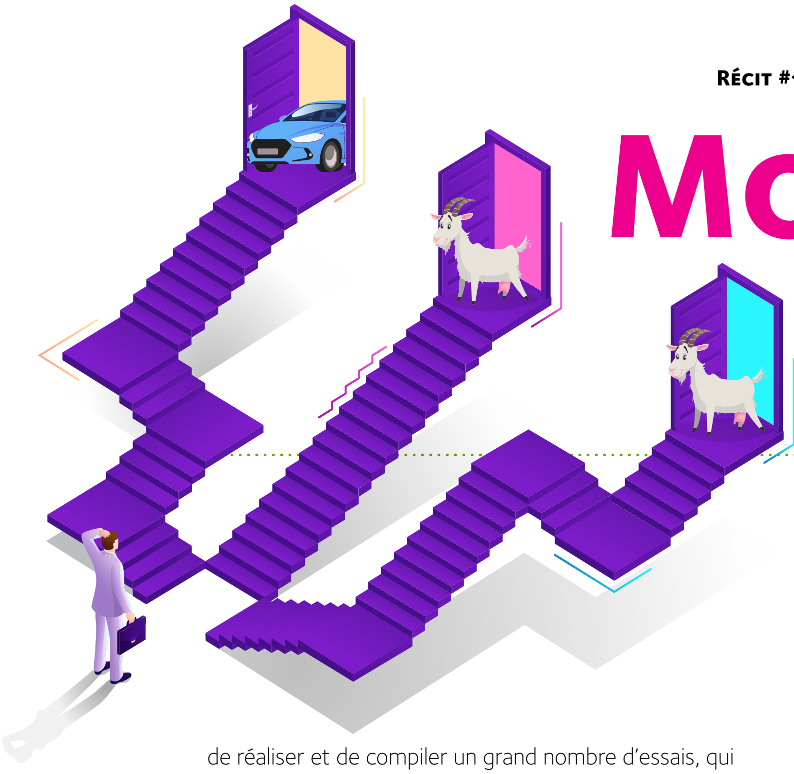
Quel est le meilleur choix?
Quelle est la probabilité de gagner la voiture?

FIGURE 1
Énoncé de la situation de Monty Hall

Cette situation, aussi appelée le « jeu des trois portes », est reconnue pour son caractère contre-intuitif et a déjà été traitée par de nombreux auteurs (par exemple, Chernoff, 2019 ; Theis et Savard, 2011) et même dans des films et séries (par exemple, Las Vegas 21). Lors de la première séance de formation, nous avons souligné le caractère contre-intuitif de cette situation où on pense d'abord que ça ne change rien de garder ou changer la porte puisque la probabilité serait de $\frac{1}{2}$ pour chaque stratégie. Ce raisonnement amène à une impasse… En effet, l'intuition de plusieurs personnes (même des mathématiciens célèbres) amène à penser que le fait de garder le choix de porte initial offre la même probabilité de gagner que le fait de changer de porte, alors qu'il est deux fois plus probable de gagner en changeant de porte qu'en la gardant (j'y reviendrai !).

Pour réaliser cette situation avec les participant·es, du matériel leur a été fourni, soit trois cartes à jouer pour réaliser des essais en équipe alors qu'une personne jouait le rôle de directeur du jeu. Par exemple, les chèvres sont représentées par deux cartes de couleur noire (disons le 2 de pique et le 2 de trèfle) et la voiture est représentée par une carte de couleur rouge (disons l'as de cœur). Quelques essais ont ainsi été réalisés pour s'assurer de comprendre le fonctionnement du jeu et pour mettre à l'épreuve une prédiction. Par contre, si une personne émet la prédiction (alimentée par l'intuition erronée) que les deux stratégies offrent la même probabilité de gagner, il est possible que les résultats de quelques essais ne permettent pas de dégager une tendance convaincante. Un simulateur de cette expérience aléatoire peut alors servir à remettre en doute cette prédiction et ainsi combattre cette intuition. Le fait

Monty Hall



de réaliser et de compiler un grand nombre d'essais, qui devraient fournir une tendance indiquant que la stratégie de changer de porte est optimale, pourrait en effet inciter l'apprenant·e à poursuivre sa réflexion plutôt que de rester ancré dans une intuition erronée. En tant que chercheur-formateur, j'ai proposé aux participant·es d'explorer successivement deux simulateurs de la situation de Monty Hall. La **Figure 2** illustre ces deux simulateurs, dans l'ordre où ils ont été explorés.

En comparant ces deux simulateurs, on peut remarquer qu'ils permettent tous les deux de réaliser des essais pour modéliser la situation de Monty Hall, sans toutefois offrir les mêmes informations ni les mêmes choix pour réaliser ces essais. Le premier simulateur (**Figure 2** à gauche, monurl.ca/simulateur1) ne fonctionne plus au moment actuel, car Flash ne peut plus être exécuté, mais on retrouve une alternative similaire, en anglais : monurl.ca/simulateur8. Le simulateur exploré permettait d'avoir recours à divers modes (pas à pas, rapide et turbo) et à divers paramètres (nombre de simulations, gains et stratégies), puis de présenter les résultats de différentes manières (nombres, tableau, diagramme à bandes et diagramme à ligne brisée). Ce simulateur faisait donc preuve d'une grande flexibilité et de beaucoup de potentiel étant donné ses diverses fonctionnalités. Il permettait en particulier de générer efficacement les résultats de 1000 essais en un seul clic et de les représenter instantanément sous diverses formes. Pour une série de 1000 essais, on peut être confiant (par la Loi des grands nombres) que la tendance offerte par la fréquence sera assez près de la probabilité. En effet, plus le nombre d'essais est élevé, plus la fréquence (obtenue par l'approche fréquentielle à partir de résultats de ces essais) devrait tendre vers la probabilité (obtenue par l'approche théorique à partir du rapport entre le nombre de cas favorable et le nombre de cas possibles). Ainsi, les résultats obtenus par le simulateur qui avait été exploré (ou son alternative) devraient indiquer une tendance où la probabilité de gagner en gardant la porte semble être de $\frac{1}{3}$, alors que la probabilité de gagner en changeant de porte semble être de $\frac{2}{3}$.

En comparaison, le deuxième simulateur (**Figure 2** à droite, monurl.ca/simulateur2) est plus convivial, alors que moins de choix de paramètres sont offerts à l'utilisateur pour réaliser des essais très simplement. Grâce (pseudonyme) a dit que le deuxième simulateur est plus visuel et plus accessible pour des

(Sources : http://monurl.ca/simulateur1 et http://monurl.ca/simulateur2)

Figure 2
Deux simulateurs de la situation de Monty Hall explorés successivement par les participant·es

élèves. En effet, il suffit de cliquer sur une des trois portes, ce qui fait apparaître une chèvre derrière l'une des deux autres portes, puis de choisir ensuite sa stratégie en cliquant sur la porte choisie initialement ou sur celle demeurée fermée. Les portes s'ouvrent ensuite pour faire apparaître les chèvres et la voiture, annonçant ainsi le résultat de la partie (gagné ou perdu). Brian a dit que ce simulateur aide à comprendre la situation de départ beaucoup plus facilement en la visualisant. Grâce a aussi fait remarquer qu'il faudrait garder la même stratégie en réalisant des essais avec ce simulateur, sinon ça vient mélanger les résultats, car il ne faudrait pas compiler des données qui n'ont pas les mêmes conditions. En effet, il garde les traces du nombre de parties gagnées et perdues, du nombre de parties jouées ainsi que du nombre de parties avec la stratégie « changer » (duquel on peut déduire le nombre de parties avec la stratégie « garder »), sans toutefois associer les parties gagnées (ou perdues) aux stratégies adoptées. Déborah a suggéré de demander aux élèves d'utiliser ce simulateur pour qu'ils réalisent qu'il faut séparer les stratégies afin que la compilation des données soit adéquate. Florence a ajouté qu'elle aimait les pourcentages du premier simulateur, alors qu'il faudrait les calculer si on utilise le deuxième simulateur. Celui-ci est amusant à jouer et il est visuel, mais il manque le pourcentage et le diagramme à bandes selon Florence. De plus, ce simulateur ne permet pas de générer efficacement la tendance des résultats d'un grand nombre de parties comme le faisait le premier simulateur. Pour générer rapidement des résultats, le deuxième simulateur est plus efficace que de faire des essais individuels à la main (avec les cartes à jouer), mais pas autant que le premier simulateur.

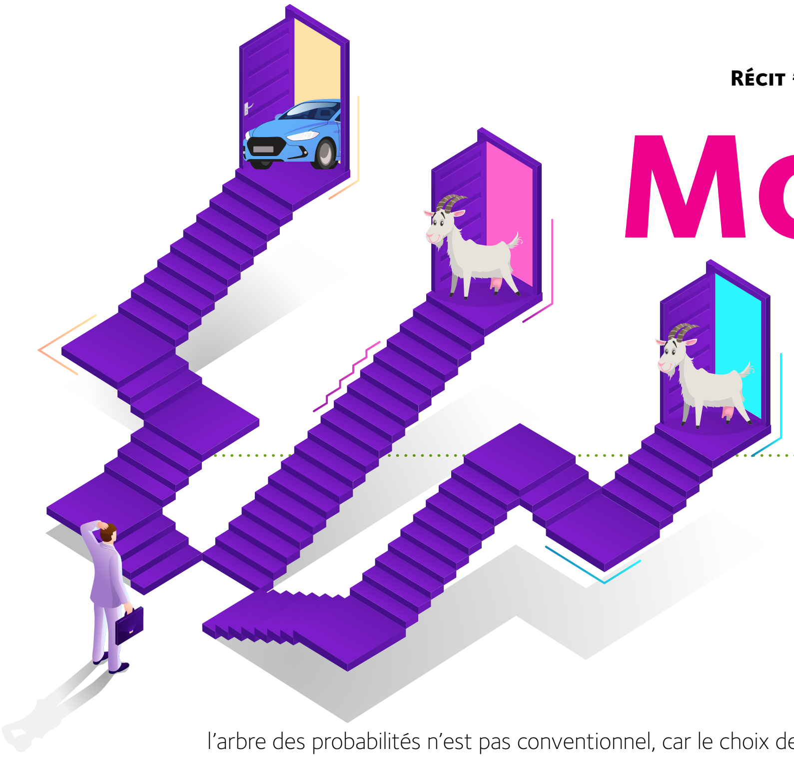
Ces simulateurs permettent ainsi de réaliser des essais plus efficacement dans l'approche fréquentielle. Pour cette raison, chaque participant·e était d'avis que les simulateurs sont indispensables dans cette situation, en montrant une tendance à long terme avec des fréquences qui se stabilisent autour de $\frac{1}{3}$ (garder la porte) et de $\frac{2}{3}$ (changer de porte). Toutefois, ces simulateurs ne fournissent pas l'explication qui permet d'expliquer la probabilité de gagner pour chacune des stratégies. Par l'approche théorique, il convient alors de déterminer les probabilités de gagner selon la stratégie de garder la porte et la stratégie de changer de porte.

Dans un premier temps, quelle est la probabilité de gagner avec la stratégie de garder la porte ? Au départ, la porte choisie peut cacher une voiture (gain) ou une chèvre (perte). Si le choix initial de la porte cache la voiture, dans $\frac{1}{3}$ des cas, je garde cette porte (selon ma stratégie) et je vais donc gagner. Donc, la stratégie de garder la porte offre une probabilité de gagner de $\frac{1}{3}$. Ainsi, de façon complémentaire, la probabilité de perdre en gardant la porte est de $\frac{2}{3}$. En ce sens, il est plus probable de perdre que de gagner en gardant la porte choisie au départ.

Dans un deuxième temps, quelle est la probabilité de gagner avec la stratégie de changer de porte ? Si le choix initial de la porte cache une chèvre, dans $\frac{2}{3}$ des cas, on va me révéler l'autre chèvre et je change alors de porte (selon ma stratégie) vers la voiture, ce qui me fait gagner. Donc, la stratégie de changer de porte offre une probabilité de gagner de $\frac{2}{3}$. Ainsi, de façon complémentaire, la probabilité de perdre en changeant de porte est de $\frac{1}{3}$. En ce sens, il est plus probable de gagner que de perdre en changeant de porte. Alors, la personne qui joue devrait changer de porte pour doubler sa probabilité de gagner ($\frac{2}{3}$ plutôt que $\frac{1}{3}$).

Les participant·es ont alors eu l'occasion de réfléchir au potentiel de cette situation, du matériel de manipulation et des outils technologiques qui l'accompagnent pour l'enseignement des probabilités. Les participant·es ont pu constater que l'explication n'est pas très facile à verbaliser et que l'usage de matériel (cartes à jouer) permet de mieux comprendre ce qui se passe quand on garde ou on change de porte. Comme le souligne Florence, on remarque que plus on simule un grand nombre de fois, plus on tend vers la probabilité (par calcul dans l'approche théorique). Brian a dit que le simulateur sert à combattre une intuition erronée, en prouvant que ce n'est pas une probabilité de $\frac{1}{2}$, et que ça permet d'avancer ensuite vers l'explication théorique. Déborah nous a donné des idées pour exploiter cette situation avec des élèves, étant donné qu'elle l'avait déjà expérimentée auparavant avec ses élèves. Elle avait commencé par leur montrer le jeu à l'avant de la classe avec des enveloppes (au lieu de cartes à jouer). Les essais simulés avec les enveloppes donnaient l'impression qu'il était mieux de changer de porte, mais il aurait aussi été possible qu'un petit échantillon ne montre pas cette tendance. Pour simuler davantage d'essais, elle avait demandé de compiler les résultats de tous les élèves, puis elle avait utilisé le premier simulateur. Elle a dit que certains élèves n'ont pu être convaincus par les explications. L'un d'eux arrivait même à expliquer que la probabilité est plutôt de $\frac{1}{2}$, en disant que le simulateur ne fonctionnait pas. Grace a demandé s'il serait préférable de commencer avec une situation simple pour convaincre que le simulateur fonctionne. Elle était d'avis que ça devient plus évident de faire confiance au simulateur une fois que le raisonnement a été développé par des situations plus simples d'abord. Elle disait d'ailleurs que le blocage de $\frac{1}{2}$ ne serait peut-être pas là si le raisonnement a été développé par des situations plus simples d'abord. Elle a ajouté que les tâches non routinières amènent à développer le raisonnement et que cette situation a sa place dans l'enseignement des probabilités, quoi que pas en début de séquence. Je reviendrai d'ailleurs avec une situation plus simple dans le récit #2… à suivre !

En ce qui concerne les concepts mobilisés par cette situation, Grâce a rappelé avec justesse que tout dépend de l'intention, car si on fait cette situation avec des élèves de 2^{e} secondaire on mettra l'emphase sur la simulation et la loi des grands nombres, alors qu'en 4^{e} secondaire on pourrait travailler l'espérance mathématique. On peut effectivement travailler l'espérance mathématique, mais plusieurs personnes du groupe ont convenu que ce ne serait pas la meilleure situation pour introduire ce concept étant donné l'aspect contre-intuitif relié aux probabilités de gagner. Les participant·es ont également remarqué que



RÉCIT #1 D'UNE RECHERCHE-FORMATION À L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS AVEC DES OUTILS TECHNOLOGIQUES :

MONTY HALL

l'arbre des probabilités n'est pas conventionnel, car le choix de la stratégie détermine le résultat final selon si on a un chèvre ou la voiture au départ. On peut voir dans la **FIGURE 3** une représentation de la probabilité de gagner ($\frac{2}{3}$) en changeant de porte.

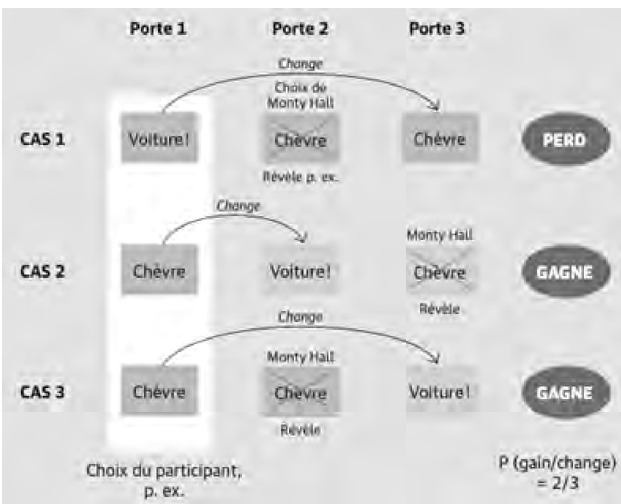


FIGURE 3
Une représentation de la solution à la situation de Monty Hall, en changeant de porte (Chernoff, 2019, p. 213)

Il y a aussi eu une discussion quant à scinder ou non la situation en sous-tâches. Par exemple, Alan a dit qu'il se demandait s'il serait préférable de demander de tester une stratégie, puis l'autre avec le simulateur et de comparer ensuite. Comme chercheur-formateur, j'ai proposé de séparer la classe en deux pour tester les stratégies, puis les comparer. La réflexion associée au fait de jouer avec les cartes et de compiler les résultats est importante pour développer la pensée probabiliste, alors il a été souligné que cette expérimentation ne doit pas être remplacée par le simulateur, mais plutôt complétée par celui-ci. Par exemple, en comparant les résultats des 80 essais réalisés par les participant·es pour chaque stratégie, on avait déjà une idée de la tendance des résultats… et pour aller plus vite on peut alors utiliser le simulateur pour être efficace en générant des résultats rapidement.

Les participant·es ont aussi souligné d'autres rôles pouvant être joués par les simulateurs. Alan a dit que le premier simulateur permettrait de donner du sens à l'espérance mathématique, en changeant les montants au lieu de faire appliquer la formule sans que les élèves comprennent ce qu'ils font. Il a aussi été mentionné que le simulateur permet de représenter la loi des grands nombres et le concept de variabilité, c'est-à-dire que la variabilité d'un petit échantillon est plus grande que celle d'un grand échantillon, alors il y a une stabilisation si on regarde l'évolution du pourcentage des parties à l'aide du diagramme à ligne brisée du premier simulateur. Un tel simulateur amène aussi à sensibiliser les élèves aux jeux de hasard et d'argent, en montrant qu'un jeu est défavorable au joueur à long terme. En offrant une représentation des fréquences à l'aide du diagramme à bandes horizontales, le premier simulateur peut aider à voir la probabilité de gagner en changeant de porte, soit $\frac{2}{3}$, car la bande bleue est à peu près deux fois plus longue que la bande rouge, comme on le voit dans la **FIGURE 2** à gauche. Grâce a ajouté que le premier simulateur aidait à combattre l'intuition d'une probabilité de $\frac{1}{2}$, mais qu'il n'aidait pas à expliquer la probabilité de gagner $\frac{2}{3}$ quand on change de porte. Selon elle, l'explication théorique serait peut-être plus facile à amener grâce au deuxième simulateur, car on est plus proche des cartes. Alan a alors proposé qu'il serait aidant de combiner l'utilisation des deux simulateurs. Grace a suggéré d'utiliser d'abord le deuxième simulateur, puis le premier simulateur, pour finalement revenir au deuxième simulateur. En ce sens, Florence a précisé que le deuxième simulateur permettrait d'abord de compléter les étapes de prédiction, d'expérimentation et de retour sur les prédictions. Le premier simulateur permettrait ensuite de convaincre que la probabilité de gagner en changeant de porte n'est pas $\frac{1}{2}$. Finalement, le deuxième simulateur pourrait aider les élèves à expliquer la probabilité de gagner de $\frac{2}{3}$. Alan était bien d'accord, car l'aspect visuel permet de bien voir le lien entre le choix initial et le résultat final si on change de porte : on perd si on a la voiture au départ et qu'on change, alors qu'on gagne si on a une chèvre au départ et qu'on change.

La suite de la discussion a amené les participant·es à formuler des conseils pour leurs collègues qui voudraient se préparer à vivre cette situation en classe. Brian a dit qu'il faut d'abord bien comprendre soi-même la situation. Pour Alan, la clé est de comprendre que, lorsqu'on change de porte, le résultat va être le contraire de ce qu'on avait initialement. Le chemin est automatique et le diagramme en arbre ne se sépare donc pas en deux choix lors de la deuxième étape (voir **Figure 3**). Grâce a mentionné qu'il est important d'utiliser les cartes à jouer pour visualiser la situation. Florence a abondé dans le même sens en disant que l'enseignant·e peut le faire en avant comme Déborah l'a fait avec ses enveloppes. Déborah a alors dit qu'elle a remarqué que les élèves comprenaient mieux la situation lorsqu'ils l'expérimentaient eux-mêmes, même si elle leur avait montré à tous précédemment. C'était différent de le faire vivre au groupe que de le faire vivre individuellement. La simulation avait même été nécessaire pour certains élèves, alors elle a dit qu'il serait préférable de leur laisser du temps pour simuler eux-mêmes avec du matériel. De plus, Déborah leur a demandé d'utiliser le simulateur après que les élèves aient vu leur enseignante l'utiliser à l'avant. Déborah pensait que ses élèves auraient été plus autonomes et a été surprise de constater qu'ils ne savaient pas trop quelle information regarder en utilisant le simulateur, d'où l'importance de guider les élèves lors de l'utilisation du simulateur.

Il serait aussi pertinent de demander aux élèves d'écrire leur prédiction et de faire plusieurs retours sur cette prédiction. Un premier retour sur cette prédiction peut être fait après avoir simulé quelques essais avec des cartes à jouer. Lors de l'expérimentation d'essais, il s'avère pertinent de laisser émerger la question quant au nombre d'essais à simuler, pour amener les élèves à réfléchir sur le choix d'en simuler le plus possible. En regroupant les résultats des essais de tous les élèves, on cherche à en avoir le plus possible pour avoir une tendance plus fiable. C'est alors qu'on peut revenir à nouveau sur la prédiction des élèves. Puis, on peut réaliser 1000 essais avec le simulateur et revenir une fois de plus sur la prédiction. Il restera ensuite à donner du sens à la probabilité, en décortiquant le nombre de cas favorables à mettre en rapport avec le nombre de cas possibles, ce qui peut être appuyé par des représentations (diagramme en arbre ou tableau). Le développement de la pensée probabiliste des élèves pourrait être renforcé par cette façon d'articuler les approches probabilistes, c'est-à-dire les approches subjective (émettre une prédiction), fréquentielle (expérimenter des essais) et théorique (calculer une probabilité).

Conclusion

À l'issue de cette première séance de formation dans laquelle la situation de Monty Hall a été expérimentée à l'aide de simulateurs, différents rôles pouvant être joués par ces simulateurs ont été identifiés :

1. Combattre une intuition erronée ;
2. Générer des résultats rapidement ;
3. Donner du sens à l'espérance mathématique ;
4. Représenter la loi des grands nombres et le concept de variabilité ;
5. Sensibiliser les élèves aux jeux de hasard et d'argent ;
6. Représenter des fréquences (par exemple, à l'aide d'un diagramme à bandes horizontales).

Le fait d'avoir analysé deux simulateurs de la même situation a amené les personnes participantes à constater qu'il y a des différences et des similitudes entre les simulateurs et ceux-ci peuvent parfois se compléter. Le matériel de manipulation apporte aussi une valeur ajoutée (Thibault, 2021b) et ne devrait pas être remplacé par le simulateur.

La situation de Monty Hall s'avère être une situation probabiliste intéressante, autant en formation continue que pour l'enseignement au secondaire. Il s'agit d'ailleurs d'une situation que j'utilise dans un cours universitaire de didactique des probabilités (et de la statistique). Voici d'ailleurs une capsule vidéo que j'avais conçue pour de l'enseignement à distance (forcé par la pandémie), qui reprend les étapes principales et les verbalisations qui peuvent être reprises et adaptées pour piloter une telle situation avec des élèves : https://youtu.be/Hx6lRp0fIOI.

Référence

Chernoff, E. J. (2019). ***L'espace échantillonnal : un univers d'interprétations possibles.*** Dans V. Martin, M. Thibault et L. Theis (dir.), Enseigner les premiers concepts de probabilités : un monde de possibilités ! (p. 195-217). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Theis, L. et Savard, A. (2011). ***Former à l'enseignement des probabilités ou sur quelles approches miser en formation continue pour obtenir des répercussions sur la pratique ?*** Vie Pédagogique, (158), 30-32. http://collections.banq.qc.ca/ark:/52327/bs2043482

Thibault, M. (2021a). R***echerche-formation sur l'enseignement des probabilités du secondaire avec des outils technologiques : enjeux de formation.*** Thèse de doctorat. Université du Québec à Montréal. https://www.researchgate.net/publication/356145559

Thibault, M. (2021b). ***Utiliser du matériel pour enseigner les probabilités au premier cycle du secondaire.*** Revue Envol, 178, 20-27. https://www.researchgate.net/publication/355574862

Solutions des questions

Opti-Math 2015
Situation 8
Triangles ou quadrilatères

a) Il y a **21 différents triangles** au total.

On peut dresser la liste des triangles en les regroupant par nombres de régions suivant l'identification ci-contre.

1 région (9 triangles) :

a – b – c – d – g – h – f – j – i

2 régions (4 triangles) :

gd – gh – fj – ij

3 régions (4 triangles) :

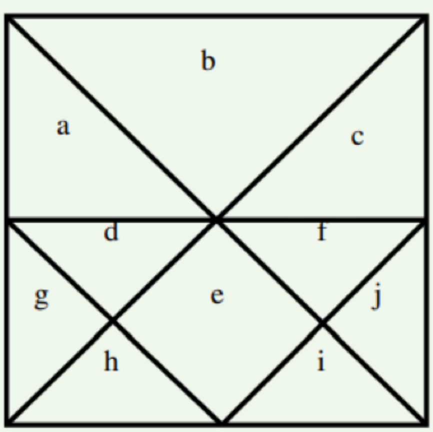
def – adg – cfj – hei

4 régions (2 triangles) :

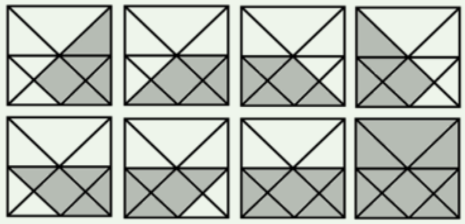
abdg – bcfj

6 régions (2 triangles) :

cfjeih – adeghi



b) Il y a **8 quadrilatères** formés de 5 régions ou plus.



Opti-Math 2008
Situation 13
Se peut-il que j'aie perdu mon temps ?

a) Hier et demain ne sont pas lundi, aujourd'hui n'est ni mercredi ni vendredi.

D	L	M	M	J	V	S

Il y a trois possibilités pour le jour d'aujourd'hui : lundi, jeudi ou samedi.

La probabilité que le jour d'aujourd'hui soit jeudi est $\frac{1}{3}$.

b) Ce n'est pas le lendemain de mardi ou le jour avant vendredi, demain n'est pas lundi, ce n'était pas lundi hier et que le jour d'après-demain n'est pas dimanche.

D	L	M	M	J	V	S

Il y a deux possibilités pour le jour d'aujourd'hui : lundi ou samedi.

La probabilité pour que le jour d'aujourd'hui ne soit pas lundi est $\frac{1}{2}$.

Opti-Math + 2002
Situation 7
Le temps perdu

a) La première partie du trajet est le $\frac{1}{4}$ de tout le trajet.

La deuxième partie correspond aux $\frac{3}{16}$ de tout le trajet.

La troisième partie correspond aux $\frac{9}{16}$ de tout le trajet.

Tout le trajet équivaut à 72 km/h fois le temps qu'il lui faut pour le faire.

$$d = 72\,t$$

Si on tient compte des vitesses moyennes pour chacun des secteurs, on a :

$$\frac{\frac{1}{4}d}{30} + \frac{\frac{3}{16}d}{50} + \frac{\frac{9}{16}d}{90} = t + 0{,}5$$

Puisque $d = 72\,t$, on obtient :

$$\frac{18t}{30} + \frac{13{,}5t}{50} + \frac{40{,}5t}{90} = t + 0{,}5$$

Ce qui donne $1{,}32\,t = t + 0{,}5$.

On obtient $t = 1{,}5625$ heure.

On multiplie le temps par 72 km/h et on détermine qu'elle avait à parcourir 112,5 km

Opti-Math + 2014
Situation 8
Dans une galaxie loin, loin...

Les Huit-Doigts utilisent la base 8.

L'ensemble de leurs chiffres est donc : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

a) La somme de 26 et 54 est **102.**

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 26 \\ +\ 54 \\ \hline 102 \end{array}$$

b) La différence entre 627 et 34 est **573**.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5\,12} \\ 627 \\ -\ 34 \\ \hline 573 \end{array}$$

c) Le produit de 206 par 341 est **72706.**

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2} \\ {\scriptstyle 3} \\ 206 \\ \times\ 341 \\ \hline 206 \\ +\ 1030 \\ 622 \\ \hline 72706 \end{array}$$

Vos prix d'excellence

GROUP3 DES RE5PONS4BLES EN MA7HÉM4TIQUE AU SEC0ND4IRE

Prix Richard Pallascio

Prix 2022 : Bravo à M. André Boileau pour sa série d'articles sur la programmation avec P5 Visuel et sa participation à l'écriture de la revue. Il remporte le prix Richard Pallascio et la bourse de 300 $.

Description : Prix pour les auteurs de la revue.

Modalités : Un jury nommé par le conseil d'administration du GRMS déterminera l'article primé et fera connaître son choix lors de la session de perfectionnement du GRMS.

Critères d'admissibilité

- Article original selon le jugement du jury
- Ne pas être membre du conseil d'administration du GRMS ;
- Avoir publié un article original dans la revue Envol avant le 30 juin.

Il doit s'agir d'un article n'ayant pas été puisé à une autre source, ou simplement traduit. Il peut cependant s'agir d'un article basé sur un écrit d'une autre source à la condition que cette source soit citée et qu'un apport original et personnel de l'auteur et soit jugé pertinent par le jury.

Montant accordé : 300 $

Note : Si l'article est présenté par une équipe, le montant du prix sera partagé entre les membres de l'équipe.

Prix Emma-Castelnuovo

Prix 2022 :

Bravo à nos laureats 2022 :

Kéven Thibeault-Boudreault	**(UQAC)**
Patrick Dessureault	**(UQAT)**
Guillaume Grenier-Langlois	**(UdeM)**
Sébastien Jacques	**(UQAM)**
Pierre-Étienne Garneau	**(ULaval)**
Émilie Manseau	**(UdeS)**
Marie-Ève Guillemette	**(UQTR)**

Description : Prix remis à neuf diplômés (es) (une personne par université participante) dans le programme d'enseignement des mathématiques au secondaire.

Critères d'admissibilité : Être bachelier dans le programme d'enseignement des mathématiques au secondaire dans une des neuf universités participantes.

Ce prix est conjointement offert par le Groupe des responsables en mathématique au secondaire (GRMS) et l'Association mathématique du Québec (AMQ). En accord avec les neuf universités québécoises francophones, ce prix sera remis à l'étudiant(e) diplômé(e) qui se démarque le plus de sa cohorte dans chacune des universités participantes.

Les universités sont : Université de Sherbrooke, Université de Montréal, Université Laval, Université du Québec à Trois-Rivières, Université du Québec à Montréal, Université du Québec en Outaouais, Université du Québec à Chicoutimi, Université du Québec à Rimouski et Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue.

Le prix : Une médaille d'honneur ainsi qu'une adhésion à l'association (GRMS) seront remises aux titulaires de ce prix.

Prix Fermat

Participez c'est pour vous!!

Prix 2022 : Bravo à Mme Nathalie Allard Mousseau et M. Mathieu Tremblay pour leur scénario d'enseignement dynamique « La grande roue de Montréal » qui se méritent le prix Fermat et le prix de 300 $.

Vous avez besoin d'$$$ pour un projet ? Vos budgets sont coupés ? On peut vous aider !

Description : Prix pour le meilleur scénario d'enseignement (1er cycle ou 2e cycle du secondaire)

Critères d'admissibilité :

- être membre en règle du GRMS ;
- ne pas être membre du conseil d'administration du GRMS ;
- avoir une bonne idée pour la réalisation d'un projet, mais ne pas avoir le soutien financier pour le réaliser ;
- brève description du projet et de la clientèle visée ;
- permettre la publication du projet dans la revue Envol.

Montant accordé :

- **Maximum de 300 $ peuvent être accordé selon l'étendue du projet ;**
- **Il est possible que plusieurs projets différents soient retenus et que le prix soit remis à plusieurs récipiendaires au prorata des projets présentés.**

Note : Si le projet est présenté par une équipe, le montant du prix sera partagé entre les membres de l'équipe.

Attribution du prix : Le conseil d'administration du GRMS se réunira une fois l'an en juin pour attribuer le prix à la ou les personnes méritantes. Vous désirez présenter votre projet ? Envoyez aux membres du conseil d'administration une brève description de celui-ci à l'adresse secretariat@grms.qc.ca.

Prix Claude Janvier

Formule simplifiée

Prix 2022 : Bravo à Jocelyn Nicol et Pierre Couillard pour leur contribution exceptionnelle à l'avancement de la mathématique qui se méritent le prix Claude Janvier et la bourse de 500 $.

Vous désirez souligner le travail d'un de vos pairs ?

Description : Prix d'excellence Claude Janvier remis annuellement à un enseignant(e) s'étant démarqué(e) dans son milieu par son dynamisme, son leadership, son innovation, la qualité de son enseignement ou son rayonnement.

Critères d'admissibilité : La candidate ou le candidat doit :

- être membre en règle du GRMS ;
- ne pas être membre du conseil d'administration du GRMS ;
- avoir œuvré dans le domaine de l'enseignement de la mathématique au secondaire.

Attribution du prix : Le conseil d'administration du GRMS se réunira une fois l'an en juin pour attribuer le prix à la personne méritante. Vous désirez souligner le travail d'un de vos pairs ? Envoyez aux membres du conseil d'administration une brève description expliquant votre recommandation à l'adresse secretariat@grms.qc.ca.

Montant accordé : 500 $


PROCHAIN RENDEZ-VOUS
[ms]
GROUP3 DES RE5PONS4BLES EN MA7HÉM4TIQUE AU SEC0ND4IRE
UNE COMMUNAUTÉ EN 50 ANS OR
50e SESSION DE PERFECTIONNEMENT
HOTEL LE VICTORIN
VICTORIAVILLE
LES 26 ET 27 OCTOBRE 2023
WWW.GRMS.QC.CA